



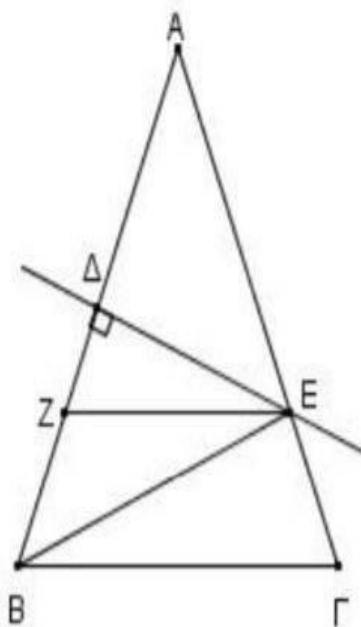
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με $\hat{A}<90^\circ$. Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την AG στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι $AE=BE$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)





1529

α) Αφού Δ μέσο της AB και η ΔE είναι ευθεία κάθετη στην AB στο Δ , τότε το $E\Delta$ είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την AB , άρα είναι $AE = BE$.

β) Επειδή $ZE \parallel B\Gamma$ και οι πλευρές BZ και GE ως τμήματα των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται στο A , το $BGEZ$ είναι τραπέζιο. Επίσης ισχύει ότι $\hat{A}B\Gamma = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Άρα το τραπέζιο $BGEZ$ είναι ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 2

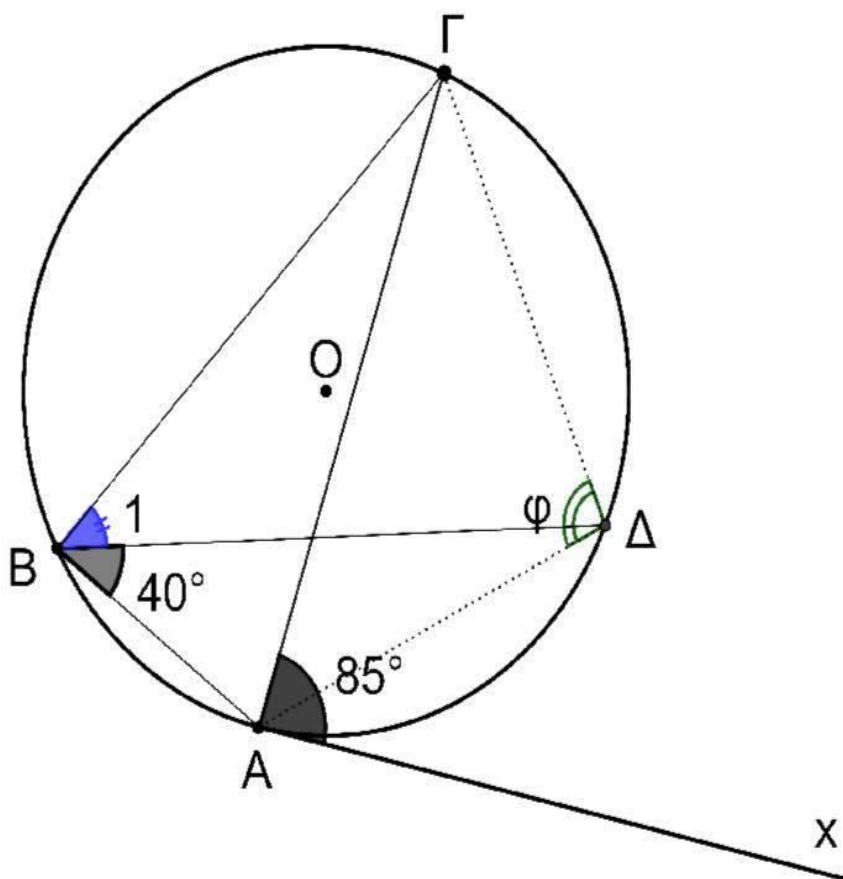
Στο σχήμα που ακολουθεί, η Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) σε σημείο του A και επιπλέον ισχύουν $\widehat{\Gamma Ax} = 85^\circ$ και $\widehat{\Delta BA} = 40^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{B_1} = 45^\circ$.

(Μονάδες 10)

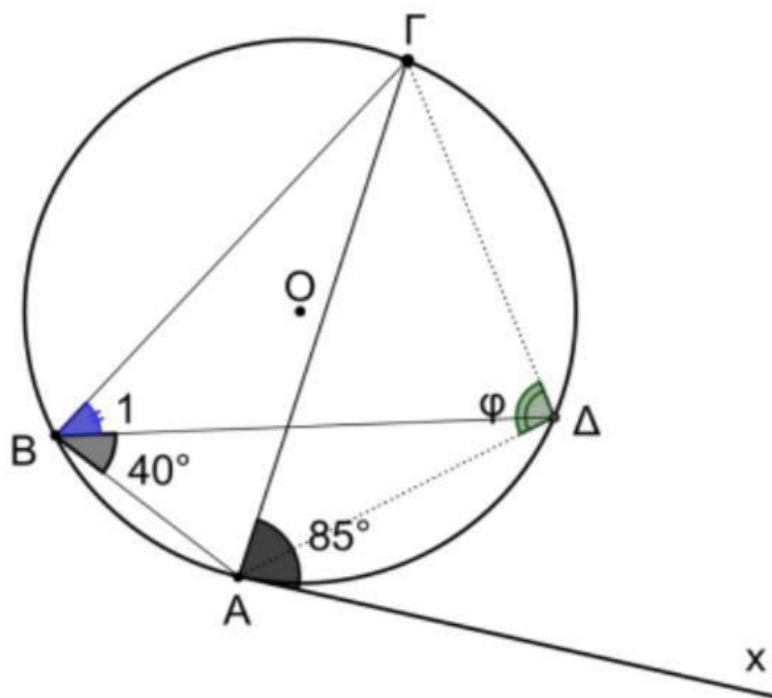
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\phi}$.

(Μονάδες 15)





1530



α) Η $\Delta\hat{A}x$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή $A\Delta$ και την εφαπτομένη στο άκρο της A οπότε θα ισούται με την εγγεγραμμένη $\Delta\hat{B}A$ που βαίνει στο τόξο $A\Delta$. Δηλαδή, είναι $\Delta\hat{B}A = \Delta\hat{A}x = 40^\circ$, οπότε, $\Gamma\hat{A}\Delta = 85^\circ - 40^\circ = 45^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι ίσες ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\Gamma\Delta$. Άρα $\hat{B}_1 = \Gamma\hat{A}\Delta = 45^\circ$.

β) Είναι $A\hat{B}\Gamma = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$ και $A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ$ ως απέναντι γωνίες του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ στον παραπάνω κύκλο. Οπότε $85^\circ + \hat{\varphi} = 180^\circ$, άρα $\hat{\varphi} = 95^\circ$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $AB=2BΓ$. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΑΔ$ (προς το μέρος του $Δ$) κατά τμήμα $ΔΕ=ΑΔ$ και φέρουμε την $ΒΕ$ που τέμνει τη $ΔΓ$ στο σημείο $Η$.

Να αποδείξετε ότι:

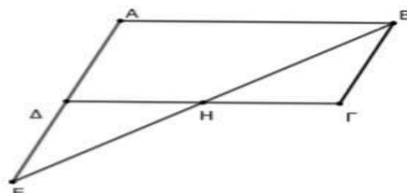
- α) το τρίγωνο $ΒΑΕ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
- β) το $ΔΕΓΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ) η $ΑΗ$ είναι διάμεσος του $ΒΑΕ$ τριγώνου. (Μονάδες 9)



1531

Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AB=2B\Gamma$, τμήμα ΔE στην προέκταση της $A\Delta$ τέτοιο ώστε $\Delta E=A\Delta$ και H το σημείο τομής της BE με την $\Delta\Gamma$.

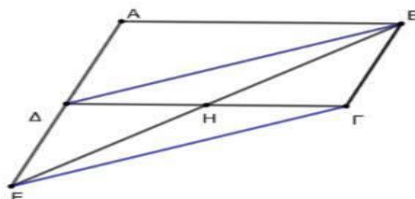
α)



Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, άρα $A\Delta = B\Gamma$.

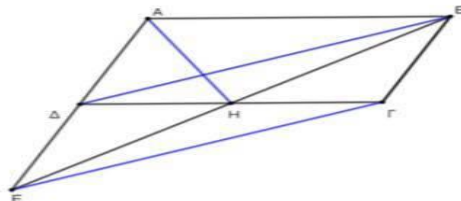
Έχουμε ότι $AE = A\Delta + \Delta E$ και αφού $A\Delta = \Delta E$ τότε $AE = 2A\Delta$ και επειδή $A\Delta = B\Gamma$ τότε $AE = 2B\Gamma$. Από την υπόθεση είναι $AB = 2B\Gamma$, επομένως $AE = AB$ και το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις AB και AE .

β)



Από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $B\Gamma \parallel A\Delta$, και στην προέκταση της $A\Delta$ το τμήμα ΔE ισούται με το $A\Delta$ οπότε και $\Delta E \parallel B\Gamma$. Άρα το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

γ)



Επειδή το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιές του $\Gamma\Delta$, BE διχοτομούνται στο H . Δηλαδή το H είναι μέσο του BE , άρα η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$) και οι διχοτόμοι του $BΔ$ και $ΓΕ$. Αν

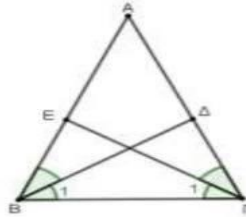
$ΕΗ \perp BΓ$ και $ΔΖ \perp BΓ$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $BΓΔ$ και $ΓΒΕ$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) $ΕΗ = ΔΖ$. (Μονάδες 12)



α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και BD, GE διχοτόμοι των γωνιών του B, Γ αντίστοιχα.

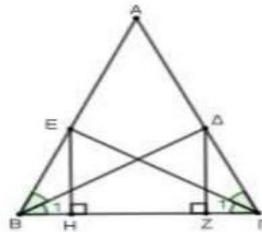


Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ έχουν:

- $B\Gamma$ κοινή πλευρά
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου
- $\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_1$ ως μισά των ίσων γωνιών B και Γ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.

β) Έστω EH και ΔZ οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$.



Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα, άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές τους BE και $\Gamma\Delta$ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma}_1$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα. (1)

Τα τρίγωνα EBH και $\Delta Z\Gamma$ έχουν:

- $\widehat{H} = \widehat{Z} = 90^\circ$ ($EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$)
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου)
- $BE = \Gamma\Delta$ από (1)

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε είναι και $EH = \Delta Z$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $MD=BM$ και την ΓN (προς το N) κατά τμήμα $NE=\Gamma N$.

α) Να αποδείξετε ότι $AD \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$. (Μονάδες 13)

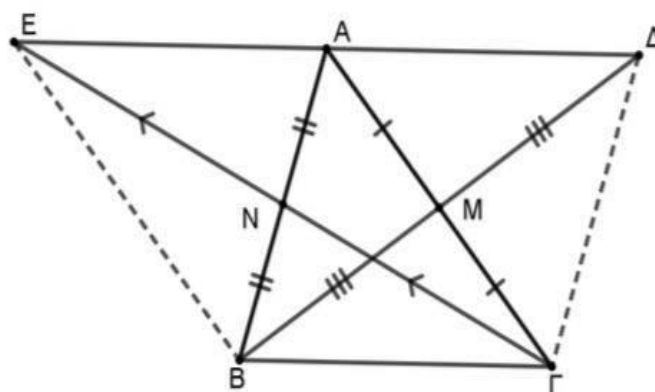
β) Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)



1533

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους BM και ΓN και τις προεκτείνουμε κατά τμήματα $M\Delta=BM$ και $NE=\Gamma N$ αντίστοιχα.



α) Επειδή $M\Delta = BM$ από κατασκευή και $AM = M\Gamma$ αφού BM διάμεσος, οι διαγώνιοι του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $A\Delta // B\Gamma$.

Επειδή $\Gamma N = NE$ από κατασκευή και $AN = NB$ αφού ΓN διάμεσος, οι διαγώνιοι του τετράπλευρου $A\Gamma BE$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $AE // B\Gamma$.

β) Από το α) ερώτημα αποδείχθηκε ότι από το σημείο A διέρχονται τα τμήματα AE και $A\Delta$ που είναι παράλληλα στη $B\Gamma$. Όμως επειδή από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σ' αυτήν, συμπεραίνουμε ότι τα τμήματα $A\Delta$ και AE έχουν τον ίδιο φορέα, δηλαδή τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνίός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

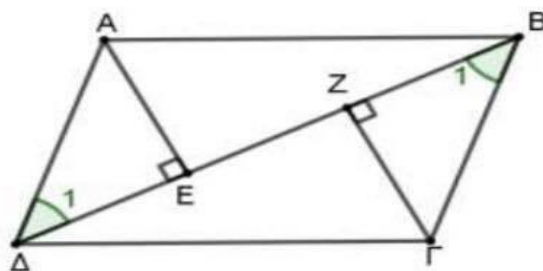
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma B Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)



Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, ΔB διαγώνιος και AE , ΓZ οι κάθετες στη $B\Delta$.

α)

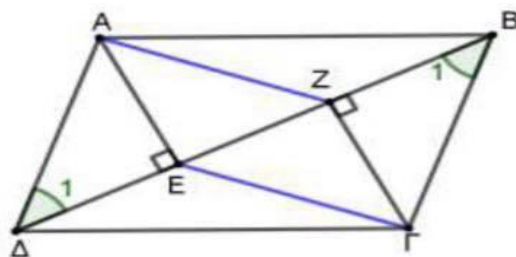


Τα τρίγωνα ΔAE και ΓBZ έχουν:

- $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$ ($AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$)
- $AD = \Gamma B$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AD , ΓB που τέμνονται από την $B\Delta$.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β)



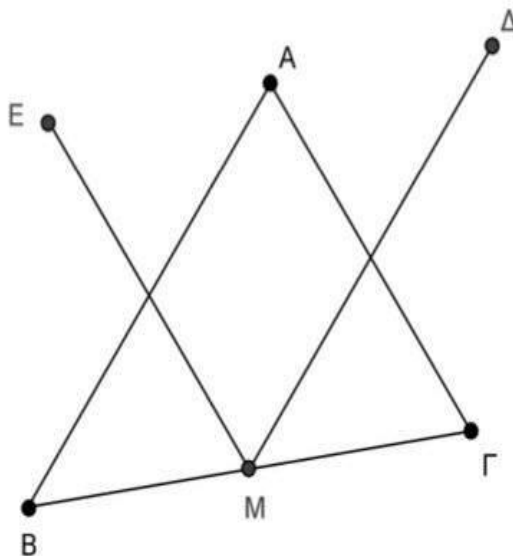
Επειδή $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$, προκύπτει ότι $AE \parallel \Gamma Z$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία $B\Delta$. Επειδή τα τρίγωνα ΔAE και ΓBZ είναι ίσα από το α), προκύπτει ότι οι πλευρές AE και ΓZ είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{B}_1$ αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.



ΘΕΜΑ 2

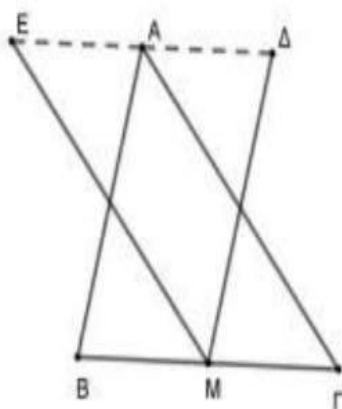
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$, στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$, φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓA . Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta A = AE$ (Μονάδες 8)
- β) Τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 9)
- γ) $\Delta E = B\Gamma$ (Μονάδες 8)





1535



α) Επειδή είναι $MD \parallel BA$ το τετράπλευρο $ABMD$ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα $AD = BM$ και $AD \parallel BM$.

Επίσης είναι $ME \parallel \Gamma A$, οπότε και το τετράπλευρο $AEM\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα $AE = M\Gamma$ και $AE \parallel M\Gamma$.

Επειδή $AD = BM$, $AE = M\Gamma$ και $BM = M\Gamma$ αφού M μέσο του $B\Gamma$, είναι και $DA = AE$.

β) Έχουμε $AD \parallel BM$ άρα $AD \parallel B\Gamma$ και επίσης $AE \parallel M\Gamma$ άρα $AE \parallel B\Gamma$. Επειδή από το σημείο A διέρχεται μοναδική παράλληλη της $B\Gamma$, τα τμήματα AD και AE βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Επομένως τα σημεία Δ , A και E είναι συνευθειακά.

γ) Είναι $DE = DA + AE = BM + M\Gamma = B\Gamma$.

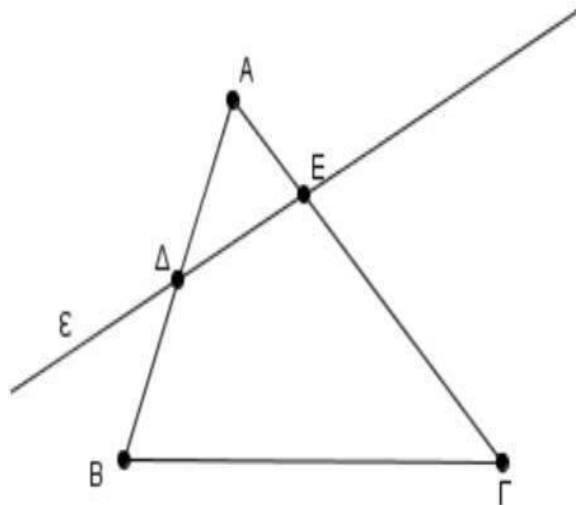


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του $AB\Gamma$ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)





1536

- α) Αν το ΒΔΕΓ είναι τραπέζιο, θα έχει δύο μόνο απέναντι πλευρές παράλληλες. Επειδή οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στην κορυφή Α του τριγώνου, παράλληλες θα πρέπει να είναι οι ΔΕ και ΒΓ. Δηλαδή, η ευθεία ε από το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ θα πρέπει να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Επομένως το σημείο Ε θα είναι μέσο της ΑΓ.
- β) Για να είναι το ΒΔΕΓ ισοσκελές τραπέζιο πρέπει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Άρα πρέπει το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 2

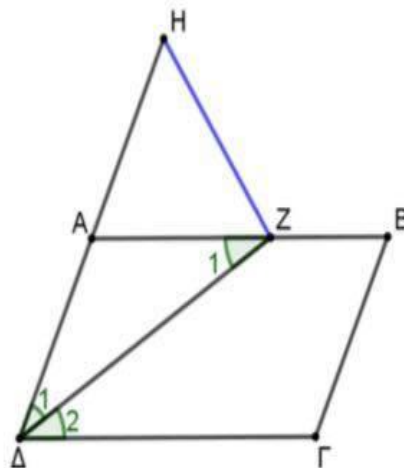
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, προεκτείνουμε την πλευρά ΔA (προς το A) κατά τμήμα $AH=\Delta A$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $\Delta\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
- β) Το τρίγωνο ΔZH είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)



Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο, τμήμα AH στην προέκταση της ΔA τέτοιο ώστε $AH = \Delta A$ και ΔZ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.



α) Είναι $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την ΔZ . Επίσης $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ αφού ΔZ διχοτόμος της γωνίας Δ . Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$, οπότε το τρίγωνο ΔZH είναι ισοσκελές με $\Delta Z = HZ$.

β) Από το α) ερώτημα είναι $\Delta A = AZ$. Όμως $AH = \Delta A$, από υπόθεση, άρα $ZA = \Delta A = AH = \frac{\Delta H}{2}$. Δηλαδή, στο τρίγωνο ΔZH η διάμεσος του ZA είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔH , επομένως $\hat{Z} = 90^\circ$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμο με $AB=2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

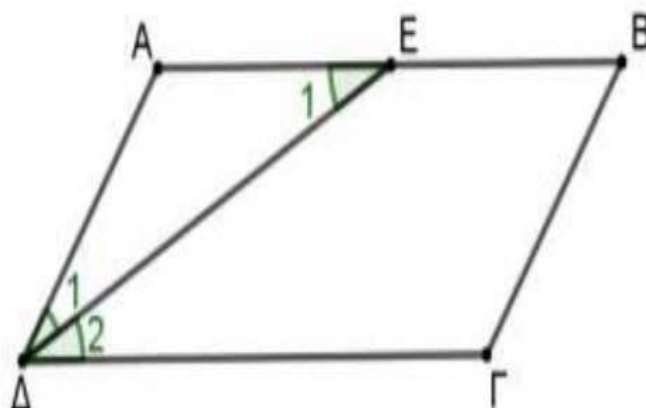
β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



1538

Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AB = 2AD$ και DE η διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.



α) Είναι $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE . $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1$ (2), επειδή DE διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. Από (1), (2) έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Άρα, το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις AD, AE .

β) Επειδή $AE = AD$ και από την υπόθεση ισχύει ότι $AD = \frac{AB}{2}$, άρα $AE = \frac{AB}{2}$. Επομένως το E είναι μέσο της AB .



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE=OZ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔE=BZ$

(Μονάδες 12)

β) το $ΔEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

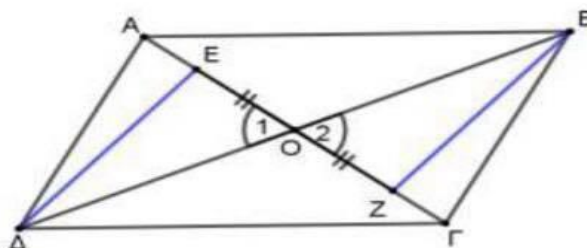
(Μονάδες 13)



1539

Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο, $ΑΓ$ και $ΒΔ$ οι διαγώνιοί του που τέμνονται στο O και E, Z σημεία στις AO, OG αντίστοιχα τέτοια ώστε $OE = OZ$.

α)

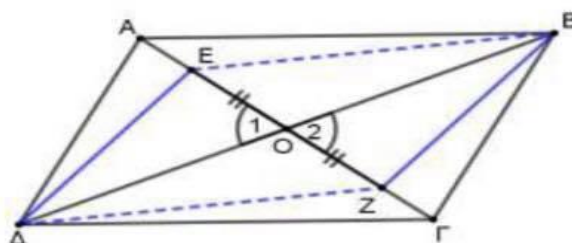


Τα τρίγωνα ODE και OBZ έχουν:

- $OD = OB$ (O κέντρο του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$)
- $OE = OZ$ (υπόθεση)
- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (κατακορυφήν γωνίες)

Σύμφωνα με το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $DE = BZ$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{O}_1$ και $\widehat{O}_2$ αντίστοιχα.

β)



Επειδή $OB = OD$ και $OE = OZ$ οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $DEBZ$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E .

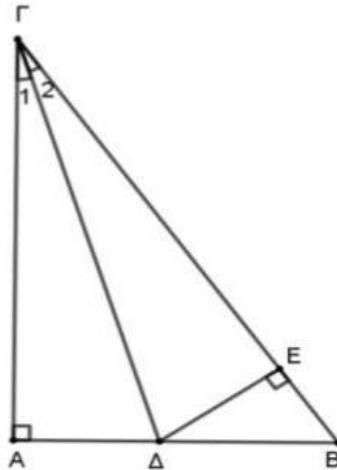
Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$ (Μονάδες 13)

β) $A\Delta < \Delta B$ (Μονάδες 12)



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}$ ορθή, $\Gamma\Delta$ η διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$ και τμήμα DE κάθετο στη $B\Gamma$.



α) Τα τρίγωνα $AD\Gamma$ και ΓDE έχουν:

- $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$ (Υπόθεση και $DE \perp B\Gamma$)
- $\Gamma\Delta$ κοινή πλευρά
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$, αφού $\Gamma\Delta$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές AD και DE είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_2$ αντίστοιχα.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο DEB η DB είναι η υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Άρα $DB > DE$. Επειδή $AD = DE$ από το α) ερώτημα, προκύπτει ότι $AD < DB$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE=AB$.

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

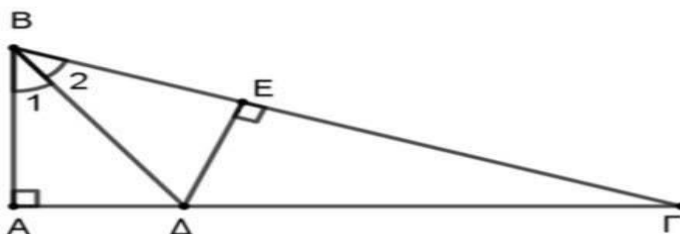
(Μονάδες 13)



1541

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A}$ ορθή, BD η διχοτόμος της $\widehat{B}$ και τμήμα DE κάθετο στη $B\Gamma$.

α)

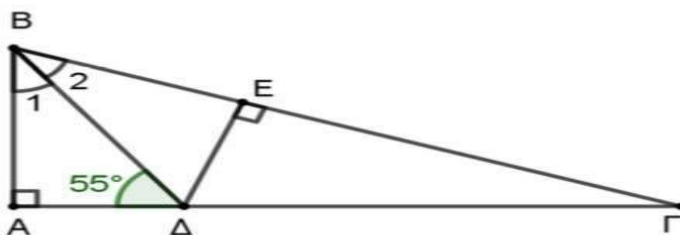


Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta E$ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ$ (Υπόθεση και $DE \perp B\Gamma$)
- $B\Delta$ κοινή πλευρά,
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, επειδή $B\Delta$ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές BE και AB είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}_2$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα.

β) Έστω ότι είναι $\widehat{B\Delta A} = 55^\circ$.



Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Delta$ ισχύει ότι $55^\circ + \widehat{B}_1 = 90^\circ$.

Άρα $\widehat{B}_1 = 35^\circ = \widehat{B}_2$ αφού $B\Delta$ διχοτόμος της $\widehat{B}$, οπότε $\widehat{B} = 70^\circ$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$.

Άρα $\widehat{\Gamma} = 20^\circ$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $\Gamma\Delta E$ ($\widehat{E} = 90^\circ$) ισχύει ότι

$\widehat{\Gamma\Delta E} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$.

Άρα $\widehat{\Gamma\Delta E} = 70^\circ$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διάμεσός του. Από το σημείο D φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $DE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

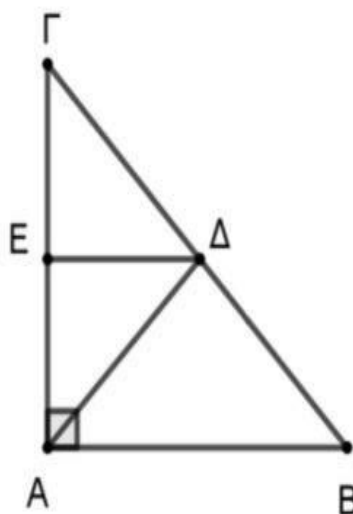
β) $DE = \frac{A\Gamma}{2}$

(Μονάδες 12)



1542

Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}$ ορθή, AD η διάμεσός του και τμήμα DE παράλληλο στην AB .



α) Είναι $AB \parallel DE$ και $AG \perp AB$. Άρα η AG θα είναι κάθετη και στην παράλληλη της AB που είναι η DE , δηλαδή $AG \perp DE$. Οπότε το τρίγωνο $DE\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma E \Delta} = 90^\circ$.

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το D είναι μέσο της $B\Gamma$ και $DE \parallel AB$, άρα και το E είναι μέσο της AG . Επειδή το τμήμα DE ενώνει τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AG του $AB\Gamma$ ισχύει ότι:

$$DE = \frac{AB}{2} \text{ ή } DE = \frac{AG}{2} \text{ αφού } AB=AG \text{ στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο } AB\Gamma.$$



ΘΕΜΑ 2^ο

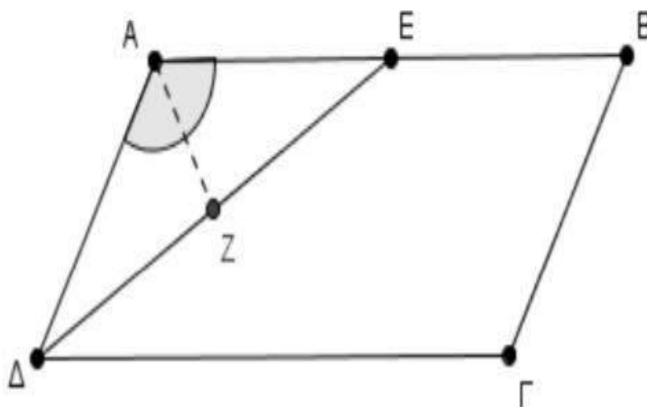
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη DE . Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$.

(μον.10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$

(μον.15)





1543

α) Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{D}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, ως γωνίες εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων AB και $\Delta\Gamma$ που τις τέμνει η $A\Delta$, είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$. Επειδή είναι $\hat{A} = 120^\circ$ τότε $\hat{D} = 60^\circ$ και αφού ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ θα είναι $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta Z$ ($AZ \perp \Delta E$) είναι $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά από τη γωνία αυτή ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AZ = \frac{A\Delta}{2}$.

Όμως είναι $A\Delta = \frac{AB}{2}$ από την υπόθεση, οπότε $AZ = \frac{AB}{4}$.



ΘΕΜΑ 2

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

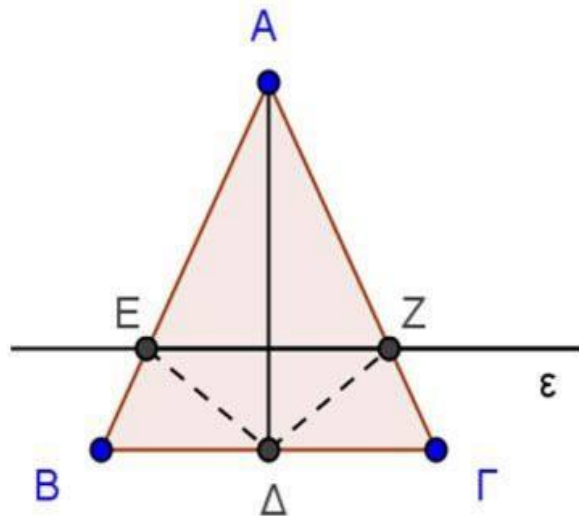
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)





α) $\widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{B}$ (1) ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $EZ//B\Gamma$ που τις τέμνει η AB .

Επίσης $\widehat{A\hat{Z}E} = \widehat{\Gamma}$ (2) ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $EZ//B\Gamma$ που τις τέμνει η $A\Gamma$.

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ως γωνίες της βάσης $B\Gamma$ στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$.

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{A\hat{Z}E}$, οπότε το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές με βάση την EZ .

β) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ έχουν:

- $A\Delta$ κοινή πλευρά
- $\widehat{E\hat{A}\Delta} = \widehat{Z\hat{A}\Delta}$, διότι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.
- $AE = AZ$, διότι AEZ ισοσκελές τρίγωνο από το α) ερώτημα.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.



ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

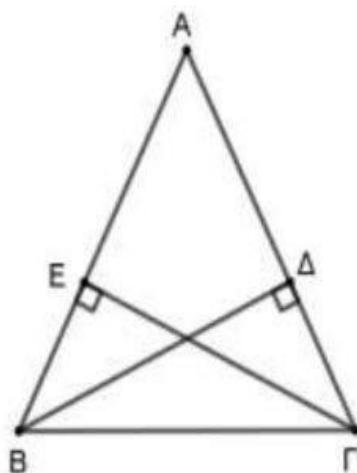
β) $AD=AE$

(Μονάδες 10)



1545

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και BD , GE ύψη στις πλευρές $A\Gamma$, AB αντίστοιχα.



α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ έχουν:

- $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$ ($B\Delta \perp A\Gamma$ και $\Gamma E \perp AB$ ως ύψη του τριγώνου)
- $B\Gamma$ κοινή πλευρά
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ γωνίες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β) Από την ισότητα των τριγώνων $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ θα ισχύει ότι οι πλευρές BE και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{\Gamma}E$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$ αντίστοιχα.

Όμως είναι $AB=A\Gamma$, οπότε $AB-BE=A\Gamma-\Gamma\Delta$, οπότε $AE=AD$ ως διαφορές ίσων τμημάτων.



ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB είναι ίσα.

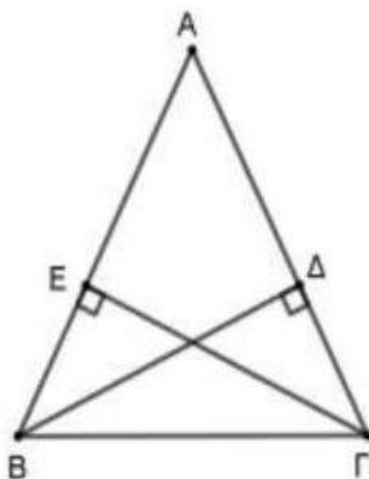
(Μονάδες 15)

β) $AD=AE$

(Μονάδες 10)



Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και BD , GE ύψη στις πλευρές $A\Gamma$, AB αντίστοιχα.



α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ έχουν:

- $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$ ($B\Delta \perp A\Gamma$ και $GE \perp AB$ ως ύψη του τριγώνου)
- $B\Gamma$ κοινή πλευρά
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ γωνίες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β) Από την ισότητα των τριγώνων $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ θα ισχύει ότι οι πλευρές BE και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}\hat{\Gamma}E$ και $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Όμως είναι $AB=A\Gamma$, οπότε $AB-BE = A\Gamma-\Gamma\Delta$, οπότε $AE=A\Delta$ ως διαφορές ίσων τμημάτων.



1547

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$.
Φέρουμε τις αποστάσεις MK και ML του σημείου M από τις ίσες πλευρές του
τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $MK=ML$.

(Μονάδες 13)

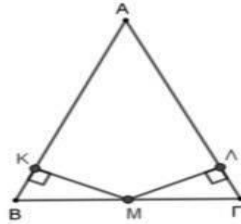
β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας KML .

(Μονάδες 12)



Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και M το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και ML του M από τις ίσες πλευρές του AB και AG αντίστοιχα.

α)

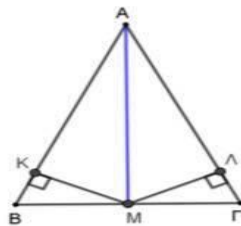


Τα τρίγωνα MKB και $ML\Gamma$ έχουν:

- $\widehat{K} = \widehat{L} = 90^\circ$ ($MK \perp AB$ και $ML \perp AG$)
- $MB = M\Gamma$, αφού M μέσο του $B\Gamma$
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, γωνίες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές MK και ML είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β)



Τα τρίγωνα AKM και ALM έχουν:

- $\widehat{K} = \widehat{L} = 90^\circ$ (όπως προηγουμένως)
- AM κοινή πλευρά
- $MK = ML$ από το α) ερώτημα

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε, θα ισχύει ότι $AK = AL$ και $\widehat{AMK} = \widehat{AML}$ ως απέναντι γωνίες των AK, AL αντίστοιχα. Άρα, η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ θα είναι διχοτόμος της $K\widehat{M}L$.



1548

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

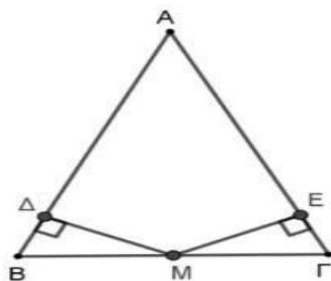
Να αποδείξετε ότι

- α) $M\Delta = ME$ (Μονάδες 12)
- β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)



Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$, M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$ και $M\Delta$, ME κάθετα τμήματα στις AB , AG αντίστοιχα.

α)

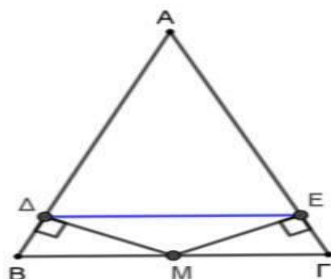


Τα τρίγωνα $M\Delta B$ και $ME\Gamma$ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{E} = 90^\circ$ ($M\Delta \perp AB$ και $ME \perp AG$)
- $MB = M\Gamma$, αφού M μέσο του $B\Gamma$
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, αφού $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίση. Οπότε έχουν και $M\Delta = ME$, αφού οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β)



Επειδή τα τρίγωνα $M\Delta B$ και $ME\Gamma$ είναι ίσα από το α) ερώτημα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους θα είναι ίσα, επομένως ισχύει $\Delta B = E\Gamma$.

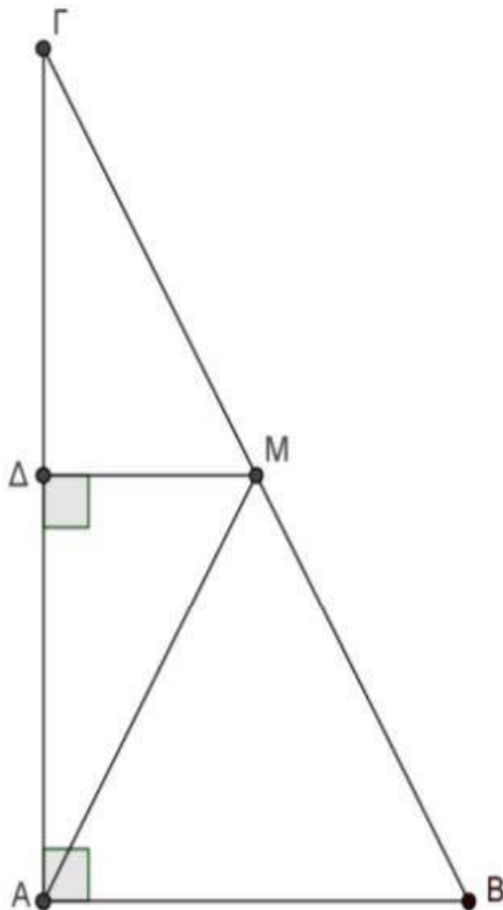
Όμως $AB = AG$, οπότε $A\Delta = AB - \Delta B$ και $AE = AG - E\Gamma$. Άρα τα τμήματα $A\Delta$ και AE είναι ίσα ως διαφορές ίσων τμημάτων. Κατά συνέπεια, το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8$. Έστω AM διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν η γωνία $\hat{A}M\Gamma$ είναι ίση με 120° , τότε:

- α) Να δείξετε ότι $AB = 4$. (Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$. (Μονάδες 13)





α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ οπότε ισχύει ότι $AM = \frac{BG}{2} = MG$. Οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}AM$ (1).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΓ ισχύει:

$$\hat{AM\Gamma} + \hat{M\hat{A}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Τότε η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αυτή τη γωνία θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή,

$$AB = \frac{BG}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΓ, το τμήμα ΜΔ, ως κάθετο στην ΑΓ θα είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ΑΓ του τριγώνου. Άρα είναι και διάμεσός του. Συνεπώς το Δ είναι μέσο της ΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το τμήμα ΜΔ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του,

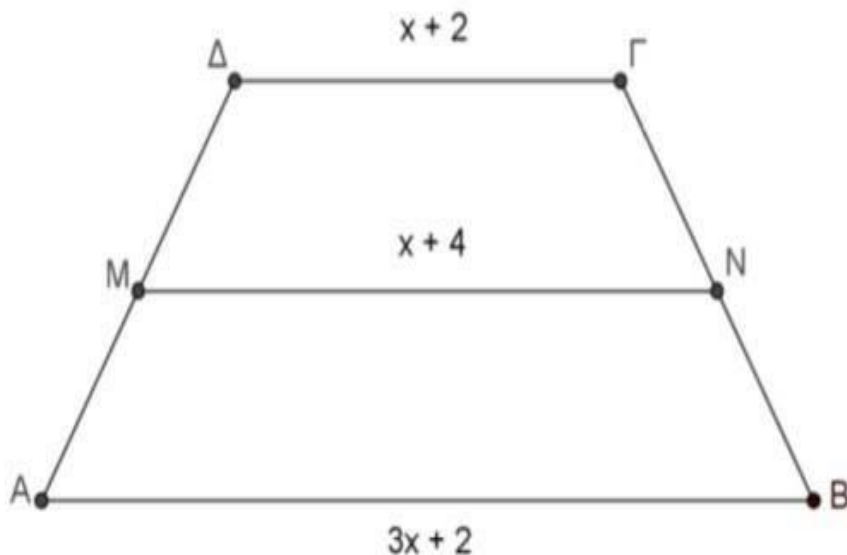
$$\text{των ΒΓ και ΑΓ, άρα } MD = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $AD = BG$.

- α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραpezίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.
(Μονάδες 12)
- β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου.
(Μονάδες 13)





1550

α) Η MN είναι διάμεσος στο ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ, οπότε η MN θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων AB και ΓΔ του τραpezίου, δηλαδή $MN = \frac{AB+ΓΔ}{2}$ (1)

Η σχέση (1) με βάση τα δεδομένα γίνεται:

$$x + 4 = \frac{3x+2+x+2}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{4x+4}{2} \Leftrightarrow x + 4 = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 2$$

β) Για τις γωνίες του τραpezίου ABΓΔ ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ$.

Αφού το τραπέζιο ABΓΔ είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται στις βάσεις του AB και ΓΔ θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

Οπότε η σχέση του αθροίσματος των γωνιών του τραpezίου ABΓΔ γίνεται

$$2\hat{B} + 2\hat{\Gamma} = 360^\circ \text{ ή } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ και αφού από την υπόθεση είναι } \hat{B} = 2\hat{\Gamma} \text{ τότε}$$

$$2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 3\hat{\Gamma} = 180^\circ, \text{ άρα } \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

Όμως είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$, άρα θα είναι και $\hat{\Delta} = 60^\circ$.

Αφού από την υπόθεση ισχύει ότι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, τότε θα είναι $\hat{B} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Όμως $\hat{A} = \hat{B}$, τότε θα είναι $\hat{A} = 120^\circ$.

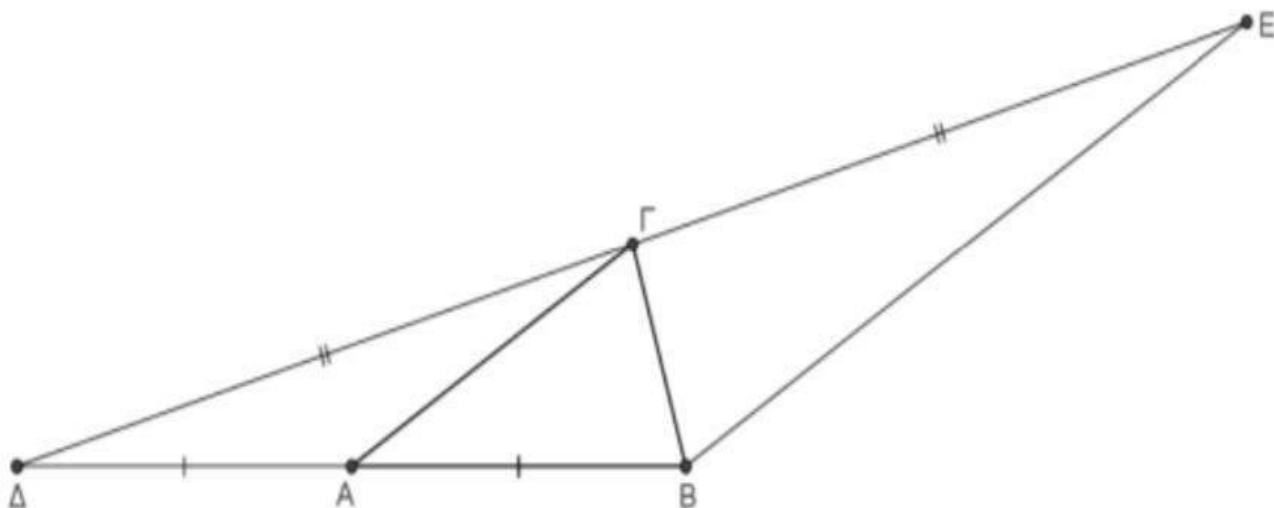


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $A\Gamma \parallel BE$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$. (Μονάδες 13)





α) Αφού είναι $AB=AD$, τότε το A είναι μέσο του τμήματος DB και θα ισχύει

$$AB=AD=\frac{\Delta B}{2}.$$

Αφού είναι $AB = AG$ και $AB=AD=\frac{\Delta B}{2}$, τότε θα είναι $AB = AG = AD=\frac{\Delta B}{2}$, δηλαδή $GA=\frac{\Delta B}{2}$.

Οπότε, η GA είναι διάμεσος στην πλευρά DB του τριγώνου ΔGB και ισούται με το μισό της. Άρα το τρίγωνο ΔGB είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά DB .

β) Επειδή είναι $AB = AD$ και $\Delta G = GE$, άρα τα σημεία A και Γ είναι μέσα των τμημάτων DB και ΔG . Οπότε, στο τρίγωνο BDE το τμήμα $A\Gamma$ ενώνει τα μέσα των πλευρών DB και ΔE , άρα θα είναι παράλληλο προς την πλευρά BE και ίσο με το μισό της, δηλαδή

$$A\Gamma \parallel BE \text{ και } A\Gamma = \frac{BE}{2}$$

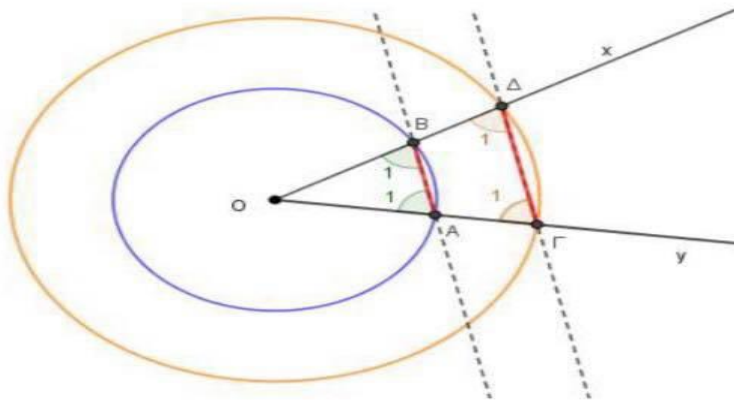


1552

ΘΕΜΑ 2

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $\chi\hat{O}y$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας στα σημεία A, B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

(Μονάδες 25)



Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές διότι $OA = OB$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

$$\text{Άρα } \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \quad (1).$$

Για τις γωνίες του τριγώνου OAB ισχύει ότι:

$$\hat{O} + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{O}$$

$$2\hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{O} \quad [\text{λόγω της (1)}]$$

$$\text{Άρα, } \hat{B}_1 = \frac{180^\circ - \hat{O}}{2} \quad (2)$$

Το τρίγωνο OΓΔ είναι ισοσκελές διότι $OG = OD$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

$$\text{Άρα } \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (3)$$

Για τις γωνίες του τριγώνου OΓΔ ισχύει ότι:

$$\hat{O} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ$$

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ - \hat{O}$$

$$2\hat{\Delta}_1 = 180^\circ - \hat{O} \quad [\text{σχέση (3)}]$$

$$\text{Άρα, } \hat{\Delta}_1 = \frac{180^\circ - \hat{O}}{2} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Όμως, οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ βρίσκονται εκτός, εντός των ευθειών AB και ΓΔ και προς το ίδιο μέρος με την τέμνουσα Ox των ευθειών.

Οπότε οι ευθείες AB και ΓΔ θα είναι παράλληλες γιατί τεμνόμενες από την Ox σχηματίζουν δυο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. Άρα και οι χορδές AB και ΓΔ θα είναι παράλληλες ως τμήματα παράλληλων ευθειών.

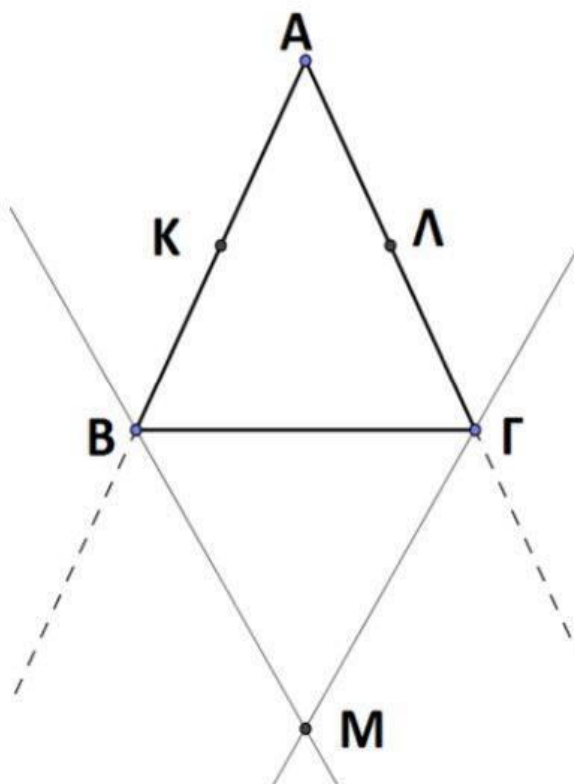


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

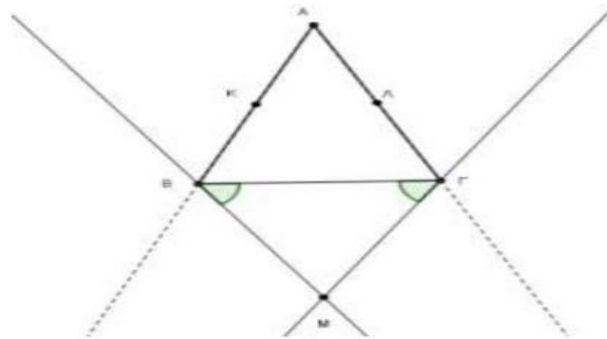
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB=M\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $MK=ML$. (Μονάδες 13)





α)



Αφού το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές άρα οι προσκείμενες στη βάση του BΓ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

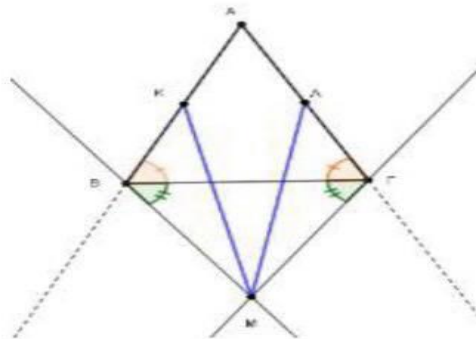
Επειδή οι BM και ΓM είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα,

$$\text{έχουμε: } \widehat{MB\Gamma} = \frac{\widehat{B_{\text{εξ}}}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma_{\text{εξ}}}}{2} = \widehat{M\Gamma B}$$

Οπότε, το τρίγωνο MΓB έχει δύο γωνίες του που πρόσκεινται στην πλευρά BΓ ίσες.

Άρα το τρίγωνο MΓB είναι ισοσκελές με βάση την BΓ, οπότε $MB = M\Gamma$.

β)



Τα τρίγωνα KBM και ΛΓM έχουν:

- $KB = \Lambda\Gamma$, ως μισά των ίσων πλευρών AB και AG
- $\widehat{KBM} = \widehat{B} + \widehat{MB\Gamma} = \widehat{\Gamma} + \widehat{M\Gamma B} = \widehat{\Lambda\Gamma M}$, αφού $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ως γωνίες παρά τη βάση BΓ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.
- $MB = M\Gamma$ από α) ερώτημα

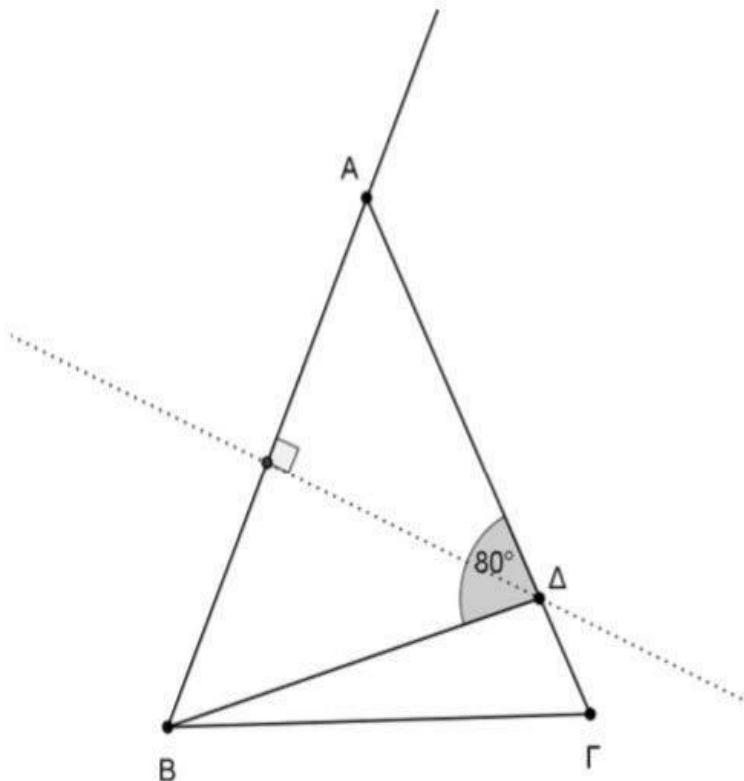
Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα KBM και ΛΓM είναι ίσα, οπότε θα είναι $MK = M\Lambda$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{KBM}$ και $\widehat{\Lambda\Gamma M}$ των δύο ίσων τριγώνων.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο $\hat{A}_{εξ} = 2\hat{A}B\Gamma$. Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς AB , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ και σχηματίζεται γωνία $A\Delta B$ ίση με 80° .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 15)

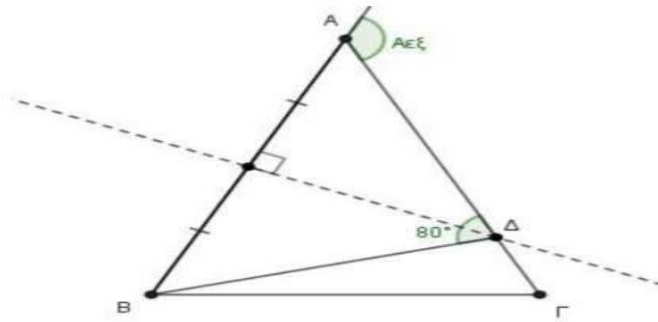




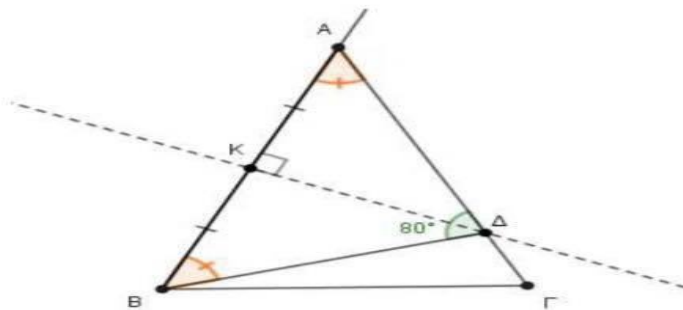
α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $\widehat{A}_{\varepsilon\varepsilon}$ θα είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\widehat{A}_{\varepsilon\varepsilon} = \widehat{A}\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma}$.

Επειδή από υπόθεση είναι $\widehat{A}_{\varepsilon\varepsilon} = 2\widehat{A}\widehat{B}\Gamma$, άρα $2\widehat{A}\widehat{B}\Gamma = \widehat{A}\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma}$, οπότε $\widehat{A}\widehat{B}\Gamma = \widehat{\Gamma}$.

Επομένως, το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει τις γωνίες που πρόσκεινται στην πλευρά του $B\Gamma$ ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, οπότε $AB = A\Gamma$.



β) Έστω K το σημείο τομής της μεσοκαθέτου της πλευράς AB του τριγώνου $AB\Gamma$.



Επειδή στο τρίγωνο $A\Delta B$ η DK είναι μεσοκάθετος στην πλευρά του AB , τότε θα είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές με βάση την AB . Άρα θα έχει ίσες και τις γωνίες του που πρόσκεινται στη βάση του, δηλαδή $\widehat{A} = \widehat{A}\widehat{B}\Delta$.

Για τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta B$ ισχύει ότι $\widehat{A}\widehat{B}\Delta + \widehat{A} + \widehat{A}\widehat{B}\Delta = 180^\circ$

Αφού είναι $\widehat{A}\widehat{B}\Delta = 80^\circ$ και $\widehat{A} = \widehat{A}\widehat{B}\Delta$, τότε έχουμε: $80^\circ + 2\widehat{A} = 180^\circ$ ή $2\widehat{A} = 100^\circ$, άρα $\widehat{A} = 50^\circ$.

Για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$

Αφού είναι $\widehat{A} = 50^\circ$ και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, τότε έχουμε: $50^\circ + 2\widehat{B} = 180^\circ$ ή $2\widehat{B} = 130^\circ$, άρα $\widehat{B} = 65^\circ$.

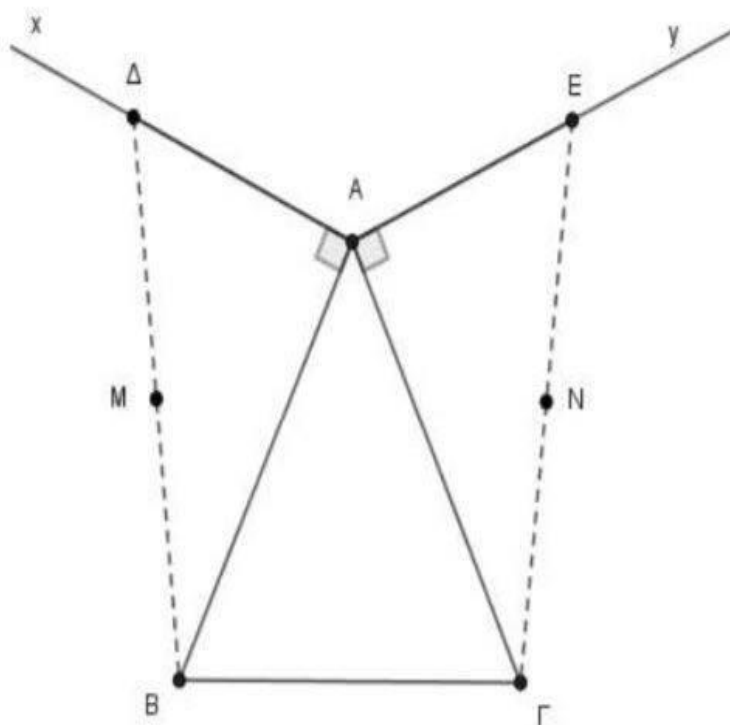


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta=AE$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=GE$. (Μονάδες 12)

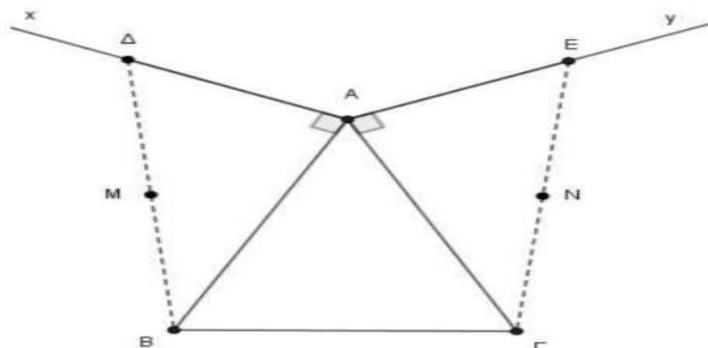
β) Αν M και N είναι τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και GE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)





1555

α)

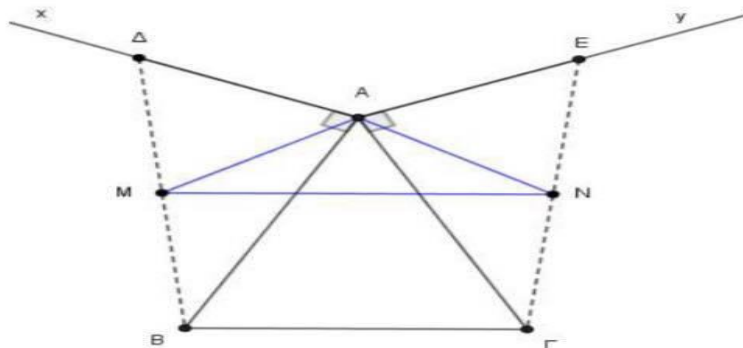


Τα τρίγωνα $\Delta B A$ και $A E \Gamma$ έχουν:

- $\widehat{B \Delta A} = \widehat{\Gamma A E} = 90^\circ$ γιατί $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$ από υπόθεση.
- $AB = A\Gamma$, από υπόθεση.
- $A\Delta = AE$, από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα $\Delta B A$ και $A E \Gamma$ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους (τις κάθετες) ίσες μία προς μία, οπότε ως ίσα θα έχουν ίσες και τις υποτείνουσές τους $B\Delta$ και ΓE , δηλαδή $B\Delta = \Gamma E$.

β)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B A$ το τμήμα AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Delta$ άρα θα ισούται με το μισό της, δηλαδή είναι $AM = \frac{B\Delta}{2}$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E A \Gamma$ το τμήμα AN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΓE άρα θα ισούται με το μισό της, δηλαδή είναι $AN = \frac{\Gamma E}{2}$ (2)

Επειδή $B\Delta = \Gamma E$ (από το ερώτημα α), τότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $AM = AN$, άρα το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 2

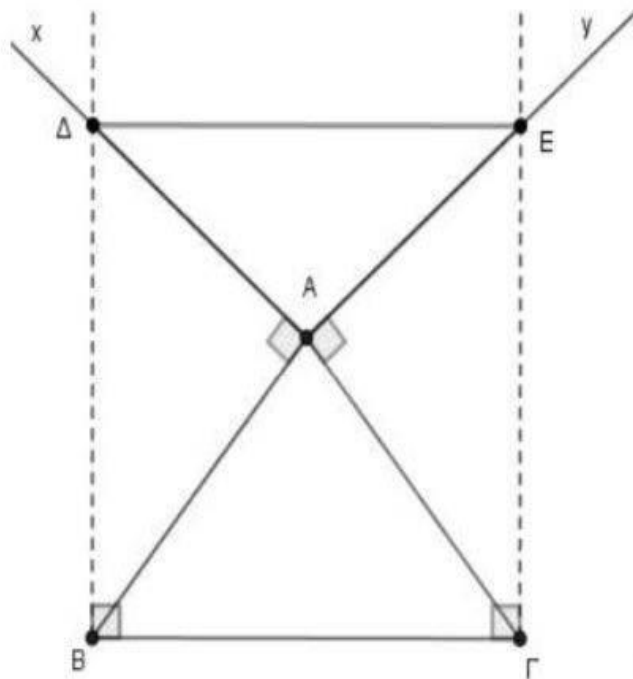
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

(Μονάδες 12)

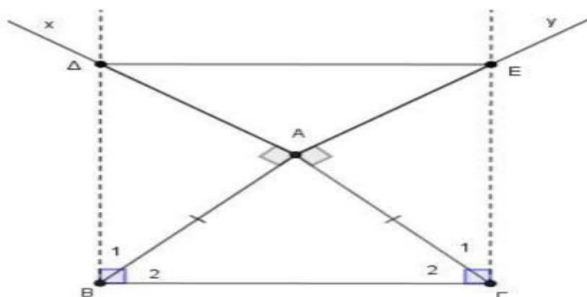
β) Αν η γωνία BAG είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔAE .

(Μονάδες 13)





α)



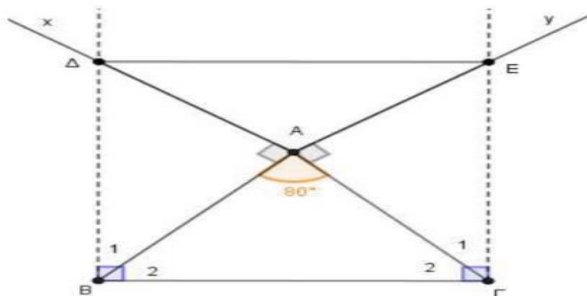
Αφού από υπόθεση είναι BD, GE κάθετες στη $BΓ$, τότε $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{E\Gamma B} = 90^\circ$.

Τα τρίγωνα ΔDB και $AE\Gamma$ έχουν:

- $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{E\Gamma B} = 90^\circ$ γιατί $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$ από υπόθεση
- $AB = AG$, από υπόθεση
- $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1}$, ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B_2}, \widehat{\Gamma_2}$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ της υπόθεσης

Άρα τα τρίγωνα ΔDB και $AE\Gamma$ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν την πλευρά οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Οπότε έχουν και $BD = GE$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B\Delta\Gamma}$ και $\widehat{E\Gamma B}$ αντίστοιχα.

β)



Είναι $\widehat{B\Delta\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta E} + \widehat{E\Gamma B} + \widehat{\Delta\Gamma B} = 360^\circ$, οπότε $80^\circ + 90^\circ + \widehat{\Delta\Gamma E} + 90^\circ = 360^\circ$.

Άρα $\widehat{\Delta\Gamma E} = 100^\circ$.

Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα θα ισχύει ότι $AD = AE$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες $\widehat{B_1}$ και $\widehat{\Gamma_1}$ αντίστοιχα.

Οπότε το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές με βάση DE άρα θα είναι $\widehat{A\Delta E} = \widehat{A\epsilon D}$ ως γωνίες που πρόσκεινται στη βάση του ισοσκελούς.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΔAE θα ισχύει $\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{A\Delta E} + \widehat{A\epsilon D} = 180^\circ$ και αφού $\widehat{A\Delta E} = \widehat{A\epsilon D}$ και $\widehat{\Delta\Gamma E} = 100^\circ$ τότε θα έχουμε $100^\circ + 2\widehat{A\Delta E} = 180^\circ$.

Άρα $\widehat{A\Delta E} = 40^\circ = \widehat{A\epsilon D}$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. (Μονάδες 15)

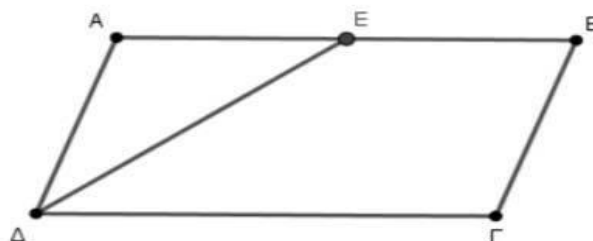


1557

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2 B\Gamma$ και E μέσο της πλευράς του AB .

α) Επειδή το E είναι μέσο της πλευράς AB , είναι $AE = \frac{AB}{2}$ και αφού $AB = 2B\Gamma$ από υπόθεση τότε $AE = \frac{2B\Gamma}{2}$ άρα $AE = B\Gamma$. Οπότε θα είναι $AE = B\Gamma = AD$ αφού $B\Gamma = AD$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Οπότε, το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις AD και AE .

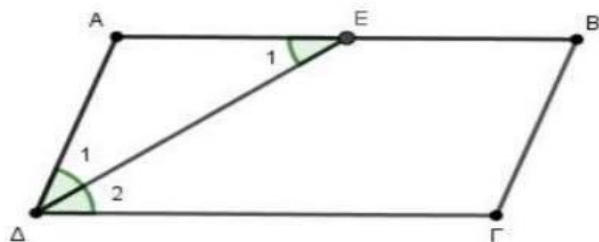


β) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο τότε $AB \parallel \Delta\Gamma$.

Επειδή το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με βάση την DE , θα είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{E}_1$ (1) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς.

Όμως $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{E}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE .

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$, άρα η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.





ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

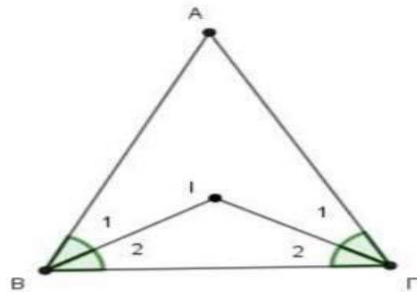
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Οι γωνίες $\hat{A\Gamma I}$ και $\hat{AIB}$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)
- γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 7)



Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του B και Γ .

α)



Αφού είναι BI διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και GI διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ τότε θα είναι

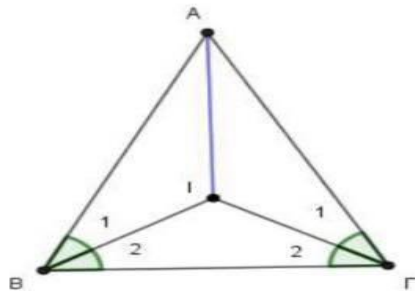
$$\widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2} \quad (1) \text{ και } \widehat{\Gamma}_2 = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} \quad (2), \text{ αντίστοιχα.}$$

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$ οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (3)

$$\text{Λόγω των σχέσεων (1), (2) και (3) θα είναι: } \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_2$$

Άρα, το τρίγωνο BIG έχει δύο γωνίες που πρόσκεινται στην πλευρά του $B\Gamma$ ίσες, τις $\widehat{B}_2$ και $\widehat{\Gamma}_2$, οπότε θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά του $B\Gamma$.

β) Φέρνουμε το τμήμα AI .



Τα τρίγωνα AIB και AIG έχουν:

- $AB = A\Gamma$ ως πλευρές του ισοσκελούς $AB\Gamma$ της υπόθεσης.
- $BI = IG$, ως ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου BIG του α) ερωτήματος.

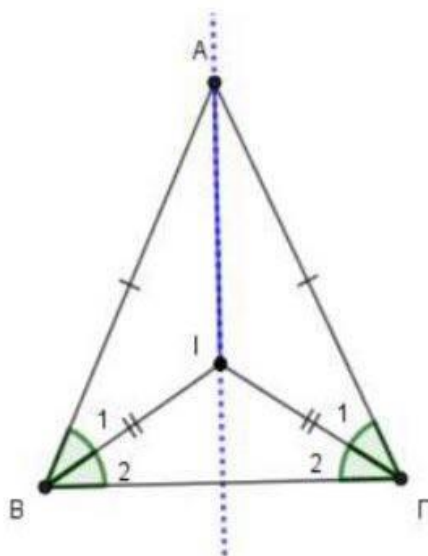


1558

- $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}_1$ αφού BI και ΓI είναι διχοτόμοι των ίσων γωνιών της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΙΓ του α) ερωτήματος.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ θα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{AIB} = \hat{AIG}$ ως γωνίες απέναντι από ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

γ)



Επειδή $AB = AG$ από υπόθεση και $BI = IG$ από α) ερώτημα, τα σημεία I και A ισαπέχουν από τα Β και Γ άρα είναι σημεία της μεσοκαθέτου του τμήματος ΒΓ.

Άρα η ΑΙ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

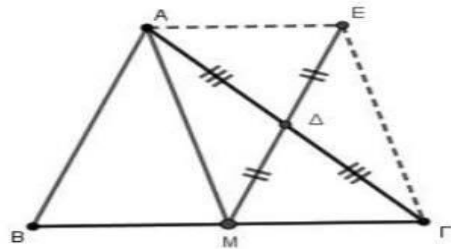
β) Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .

(Μονάδες 13)



Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσός του στην πλευρά του $B\Gamma$, $M\Delta$ η διάμεσος στην πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AM\Gamma$ και σημείο E στην προέκτασή της $M\Delta$ τέτοιο ώστε $M\Delta = \Delta E$.

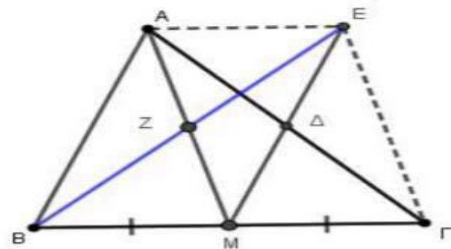
α)



Στο τετράπλευρο $AM\Gamma E$ τα $A\Gamma$, ME είναι διαγώνιοί του.

Επειδή είναι $M\Delta = \Delta E$ (υπόθεση) και $AD = \Delta\Gamma$ αφού η $M\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AM\Gamma$, έχουμε ότι στο τετράπλευρο $AM\Gamma E$ οι διαγώνιοί του ME , $A\Gamma$ διχοτομούνται στο Δ . Άρα, το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το Δ .

β)



Επειδή το $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο θα ισχύει ότι οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες και παράλληλες, δηλαδή $AE = M\Gamma$ και $AE \parallel M\Gamma$.

Επειδή είναι $AE \parallel M\Gamma$ και τα σημεία B , M , Γ είναι συνευθειακά, τότε θα είναι $AE \parallel BM$.

Επειδή είναι $AE = M\Gamma$ και $M\Gamma = MB$, αφού η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ (υπόθεση), τότε θα είναι $AE = BM$.

Οπότε, το τετράπλευρο $AEMB$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δυο απέναντι πλευρές του, τις AE και BM , παράλληλες και ίσες.

Άρα, οι διαγώνιοί του AM και BE θα διχοτομούνται και έστω Z το κέντρο του.

Επομένως, η BE διέρχεται από το μέσο Z της AM .



ΘΕΜΑ 2

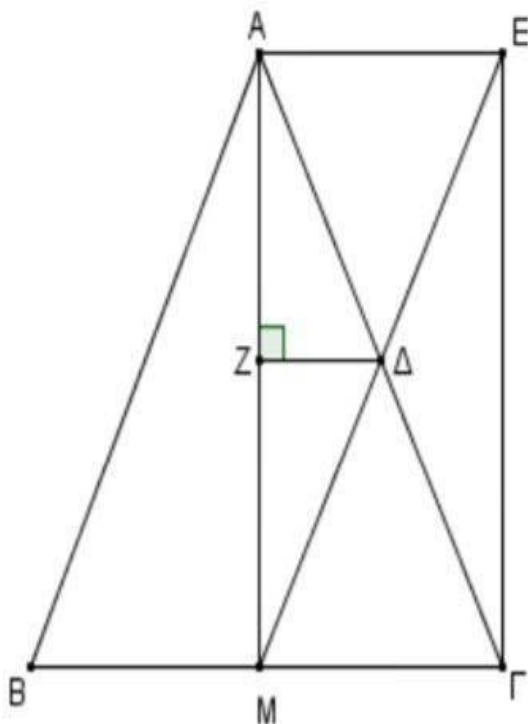
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και η διάμεσός του AM . Στο τρίγωνο $AM\Gamma$ θεωρούμε τη διάμεσο $M\Delta$ την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα $\Delta E=\Delta M$. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα $\Delta Z \perp AM$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)

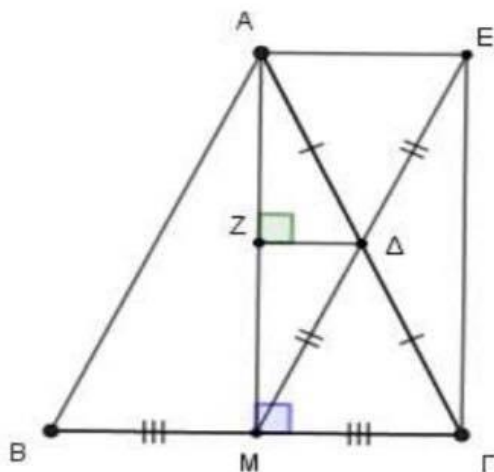
β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$

(Μονάδες 13)





1560



α) Στο τετράπλευρο ΑΜΓΕ τα ΑΓ, ΜΕ είναι διαγώνιοί του.

Επειδή είναι $ΜΔ = ΔΕ$ (υπόθεση) και $ΑΔ = ΔΓ$ αφού ΜΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΜΓ, έχουμε ότι οι διαγώνιοι ΜΕ και ΑΓ του τετραπλεύρου ΑΜΓΕ διχοτομούνται στο Δ. Οπότε, το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το Δ.

Επειδή ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, θα είναι και ύψος του τριγώνου οπότε $ΑΜ \perp ΒΓ$ (1) και $\widehat{ΑΜΓ} = 90^\circ$.

Οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΜΓΕ έχει μια γωνία του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο.

β) Αφού $ΔΖ \perp ΑΜ$ και $ΑΜ \perp ΒΓ$ (από σχέση (1)) άρα $ΔΖ \parallel ΜΓ$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΜ.

Στο τρίγωνο ΑΜΓ το Δ είναι μέσο της ΑΓ και $ΔΖ \parallel ΜΓ$, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΜ.

Οπότε, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΜ του τριγώνου ΑΜΓ άρα

θα είναι ίσο με το μισό της πλευράς του ΜΓ, δηλαδή $ΔΖ = \frac{ΜΓ}{2}$.

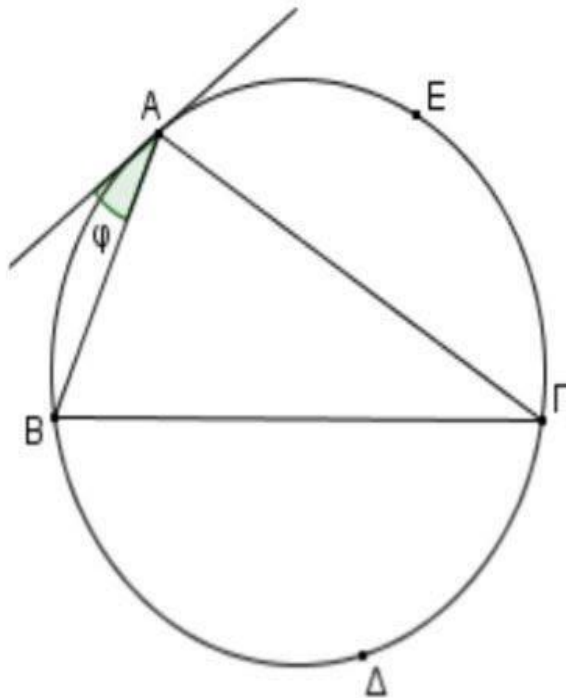
Επειδή $ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, αφού Μ μέσο ΒΓ, τότε θα είναι $ΔΖ = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2}$, οπότε $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{4}$.



ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\phi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι 160° ,
α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου $\widehat{A\epsilon\Gamma}$. (Μονάδες 7)





1561

α) Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\widehat{BD\Gamma}=160^\circ$,

$$\text{άρα } \hat{A} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Η $\hat{\varphi}$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή AB και την εφαπτομένη στο άκρο A της χορδής AB οπότε θα είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία $\hat{\Gamma}$ που βαίνει στο τόξο $\widehat{AB}$ της χορδής, δηλαδή $\hat{\Gamma} = \hat{\varphi} = 30^\circ$.

Για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, οπότε η γωνία $\hat{B}$ είναι $\hat{B} = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ$ ή $\hat{B} = 70^\circ$.

β) Η γωνία $\hat{B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\widehat{AE\Gamma}$ οπότε το μέτρο της θα ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της, δηλαδή θα είναι

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AE\Gamma}}{2} \text{ ή } 70^\circ = \frac{\widehat{AE\Gamma}}{2}, \text{ άρα } \widehat{AE\Gamma} = 140^\circ.$$



ΘΕΜΑ 2

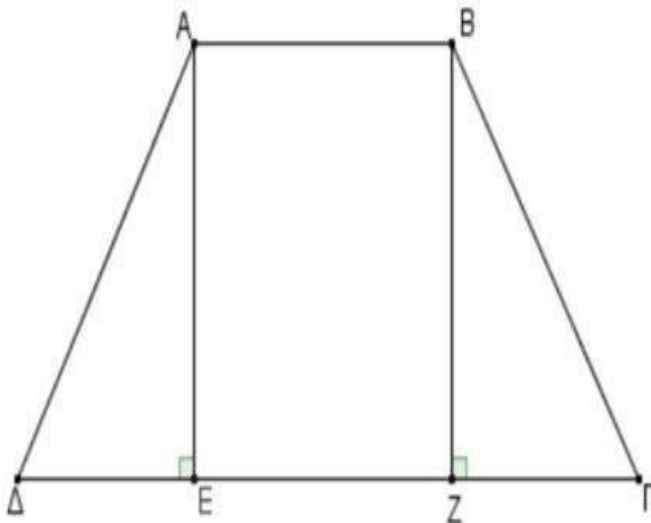
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:

α) $DE = \Gamma Z$.

(Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο.

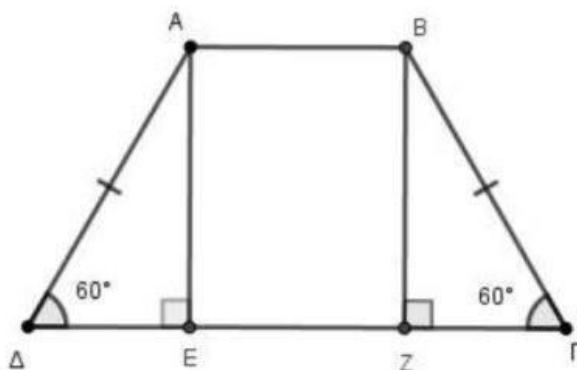
(Μονάδες 13)





1562

α) Αφού AE και BZ είναι ύψη τότε οι γωνίες $\widehat{A\hat{E}D}$ και $\widehat{B\hat{Z}G}$ είναι ορθές και τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ορθογώνια.



Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AE\Delta$, ισχύει $\widehat{DAE} + \widehat{\Delta} = 90^\circ$ και αφού $\widehat{\Delta} = 60^\circ$ τότε $\widehat{DAE} = 30^\circ$. Οπότε, η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας των 30° θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας AD , δηλαδή είναι $DE = \frac{AD}{2}$

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Gamma$ θα είναι $\widehat{ZBG} = 30^\circ$ και θα ισχύει $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2}$.

Επειδή $AD = B\Gamma$ γιατί το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, άρα $DE = \Gamma Z$.

β) Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ και το τμήμα AE είναι κάθετο στην AB ($AE \perp AB$), τότε θα είναι κάθετο και στην παράλληλη της AB , την $\Gamma\Delta$.

Οπότε, το τετράπλευρο $AEZB$ έχει τρεις γωνίες ορθές, τις $\widehat{AEZ}$, $\widehat{BZE}$ και $\widehat{EAB}$ άρα είναι ορθογώνιο.



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

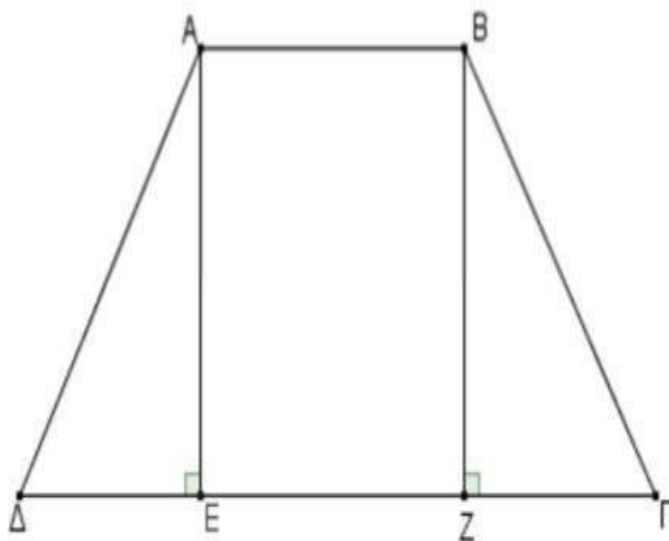
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \Gamma Z$.

(Μονάδες 12)

β) $AZ = BE$.

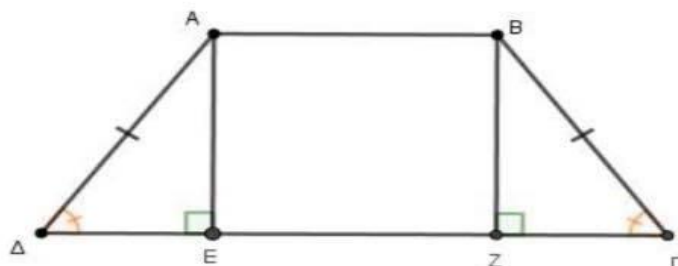
(Μονάδες 13)





1563

α)

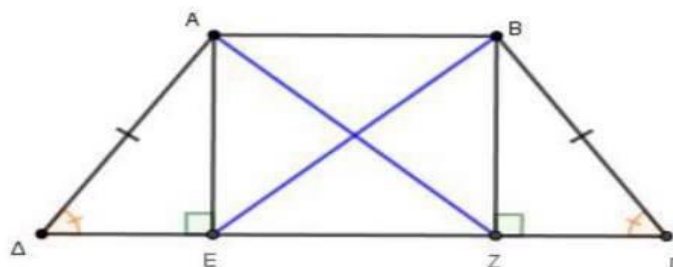


Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

- $\widehat{A\hat{E}\Delta} = \widehat{B\hat{Z}\Gamma} = 90^\circ$, αφού τα ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη του τραπεζίου ΑΒΓΔ
- $AD = B\Gamma$, ως οι ίσες μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσές τους και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους $\widehat{\Delta\hat{A}E}$ και $\widehat{Z\hat{B}\Gamma}$ ίσες, οπότε και οι απέναντί τους κάθετες πλευρές θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta E = \Gamma Z$.

β)



Αφού το ΑΕ είναι ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ τότε θα είναι $AE \perp AB$ οπότε θα είναι $\widehat{E\hat{A}B} = 90^\circ$. Άρα, το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τρεις γωνίες ορθές ($\widehat{E\hat{A}B} = \widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{E\hat{Z}B} = 90^\circ$). Επειδή οι ΑΖ και ΒΕ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου θα ισχύει ότι $AZ = BE$.



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

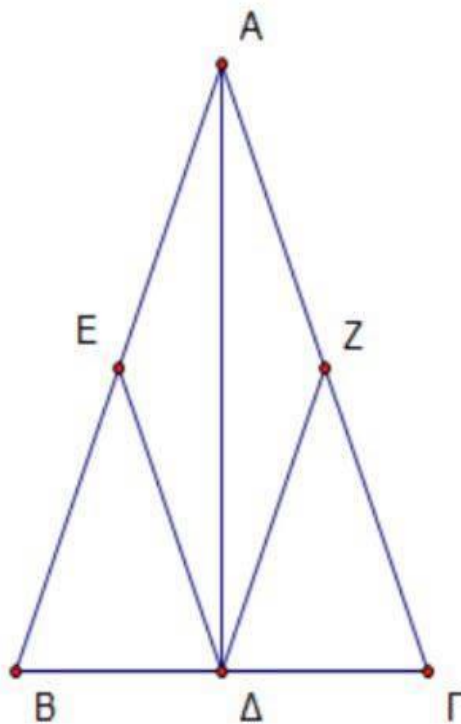
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.

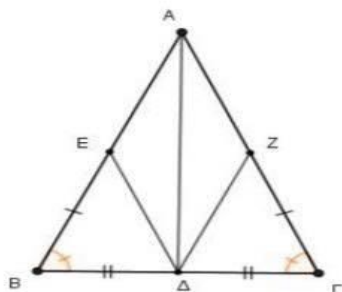
(Μονάδες 10)





1564

α)

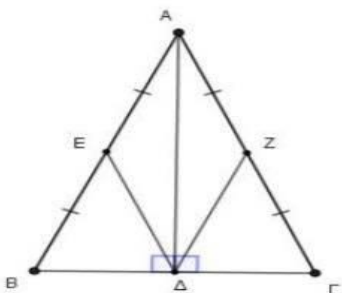


Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ έχουν:

- $BE = GZ$, ως μισά τμήματα των ίσων πλευρών AB και AG .
- $BD = G\Delta$, διότι το AD είναι ύψος οπότε είναι και διάμεσός του.
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα.

β)



Τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle AD\Gamma$ είναι ορθογώνια γιατί το AD είναι ύψος, άρα $AD \perp B\Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ADB$, η DE είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα BA , άρα $DE = \frac{AB}{2} = AE$ (1) αφού το E είναι μέσο του AB .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AD\Gamma$, η DZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα AG , άρα $DZ = \frac{AG}{2} = AZ$ (2) αφού το Z είναι μέσο του AG .

Επειδή $AB = AG$, από τις σχέσεις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $DE = EA = AZ = DZ$ άρα το τετράπλευρο $AEDZ$ είναι ρόμβος γιατί οι πλευρές του είναι ίσες.



ΘΕΜΑ 2

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B'=A'\Gamma'$) .

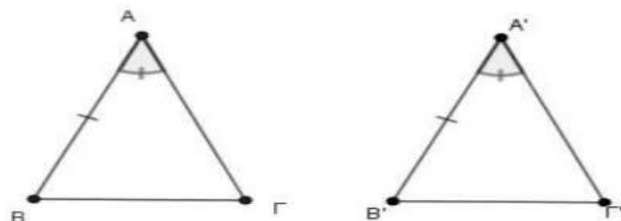
α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $A'B' = A'\Gamma'$.

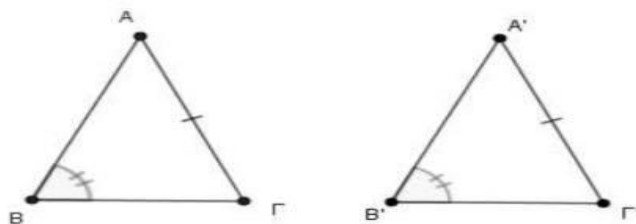
α) Έστω ότι τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $AB = A'B'$ και $\widehat{A} = \widehat{A}'$.



Τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν το καθένα ένα ζεύγος ίσων πλευρών τις $AB, A\Gamma$ και $A'B', A'\Gamma'$ αντίστοιχα. Αφού είναι $AB = A'B'$ (υπόθεση) θα είναι επίσης και $A\Gamma = A'\Gamma'$. Οπότε τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες (τις ίσες τους) και τις περιεχόμενες, στις πλευρές αυτές, γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{A}'$ ίσες από την υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο Π-Γ-Π.

β) Έστω ότι τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\widehat{B} = \widehat{B}'$.



Τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν ένα ζεύγος ίσων πλευρών τις $AB, A\Gamma$ και $A'B', A'\Gamma'$ αντίστοιχα. Αφού είναι $A\Gamma = A'\Gamma'$ θα είναι επίσης και $AB = A'B'$.

Επίσης τα δυο τρίγωνα έχουν ένα ζεύγος ίσων γωνιών, $\widehat{B} = \widehat{B}'$ και $\widehat{B}' = \widehat{B}'$ αντίστοιχα ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου. Επειδή $\widehat{B} = \widehat{B}'$ από την υπόθεση, θα είναι και $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$. Έχοντας όμως τα τρίγωνα τις δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, θα είναι ίσες και οι τρίτες γωνίες τους, δηλαδή $\widehat{A} = \widehat{A}'$. Τελικά τα τρίγωνα έχουν:

- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$
- $\widehat{A} = \widehat{A}'$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο Γ-Π-Γ.



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

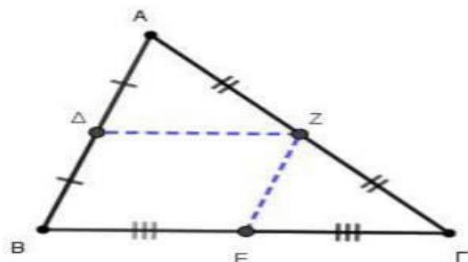
β) Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

(Μονάδες 12)



Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ , E και Z τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

α)



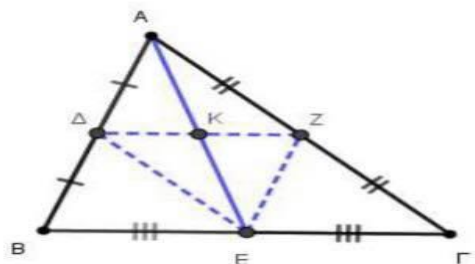
Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το τμήμα ΔZ ενώνει τα μέσα των πλευρών του AB και ΓA .

Οπότε, το ΔZ θα είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά $B\Gamma$ και ίσο με το μισό της, δηλαδή $\Delta Z \parallel B\Gamma$ και $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2} = BE$, αφού E είναι το μέσο του $B\Gamma$.

Αφού $\Delta Z \parallel B\Gamma$ τότε και $\Delta Z \parallel BE$

Οπότε, το τετράπλευρο ΔBEZ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ΔZ και BE ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β)



Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το τμήμα ΔE ενώνει τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$.

Οπότε το ΔE θα είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά ΓA , δηλαδή $\Delta E \parallel \Gamma A$ άρα και $\Delta E \parallel AZ$. Επίσης το ΔE θάναι ίσο με το μισό της ΓA , δηλαδή $\Delta E = \frac{\Gamma A}{2} = AZ$ αφού το Z είναι το μέσο του ΓA .

Οπότε, το τετράπλευρο ΔDEZ έχει τις απέναντι πλευρές του ΔE και AZ ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Οι AE και ΔZ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΔDEZ οπότε διχοτομούνται έστω K το κέντρο του. Άρα η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος AD και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$.

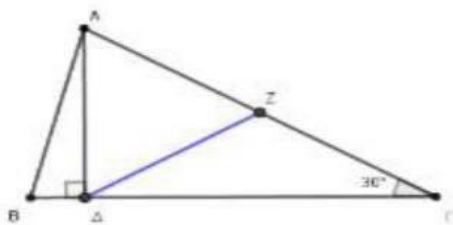
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Προεκτείνουμε το ύψος AD (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα DE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)



Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, AD ύψος και Z μέσο της $A\Gamma$.

α)

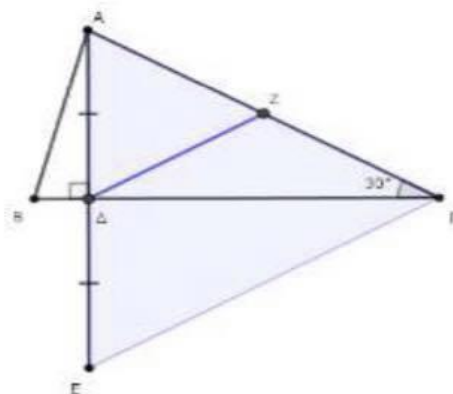


Αφού το AD είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε το τρίγωνο $AD\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Το τμήμα DZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου

τριγώνου $AD\Gamma$, άρα $DZ = \frac{A\Gamma}{2}$

β)



Έστω DE η προέκταση του ύψους AD προς το Δ κατά ίσο τμήμα DE .

Στο τρίγωνο AGE το GD είναι ύψος και διάμεσος στην πλευρά του AE , άρα το τρίγωνο AGE είναι ισοσκελές. Οπότε το GD θα είναι και διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}E$ και θα ισχύει

$A\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E = \frac{A\hat{\Gamma}E}{2}$ και επειδή είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$ θα είναι $A\hat{\Gamma}E = 60^\circ$. Επομένως το ισοσκελές τρίγωνο AGE έχει γωνία κορυφής 60° , άρα είναι ισόπλευρο.



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

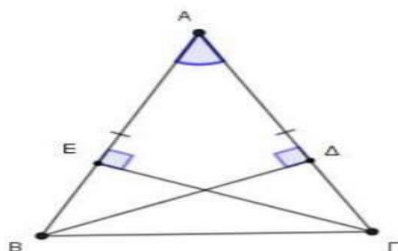
(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma=AB$.

(Μονάδες 13)



α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και BD, GE τα ύψη του στις πλευρές $A\Gamma, AB$ αντίστοιχα.

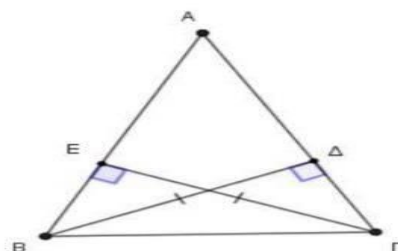


Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\epsilon \Gamma$ έχουν:

- $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\epsilon \Gamma} = 90^\circ$, γιατί BD και GE ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$ από υπόθεση.
- $AB = A\Gamma$ ως πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.
- $\widehat{A}$ γωνία κοινή

Άρα τα τρίγωνα $B\Delta A$ και $\Gamma E A$ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία ίση. Οπότε θα έχουν και τις πλευρές $B\Delta$ και $E\Gamma$ ίσες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους γωνία $\widehat{A}$.

β) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και BD, GE ύψη του στις πλευρές $A\Gamma, AB$ αντίστοιχα τα οποία είναι ίσα.



Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B\Delta \Gamma$ έχουν:

- $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{B\Delta \Gamma} = 90^\circ$, γιατί GE και BD ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$ από υπόθεση.
- $B\Gamma$ κοινή πλευρά
- $B\Delta = GE$ ως δεδομένο

Άρα τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B\Delta \Gamma$ είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Οπότε, έχουν και $\widehat{\Gamma} = \widehat{B}$ (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων

πλευρών $B\Delta$ και GE , αντίστοιχα. Οπότε, το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει δύο γωνίες του ίσες, τις $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$, άρα είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.



ΘΕΜΑ 2

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

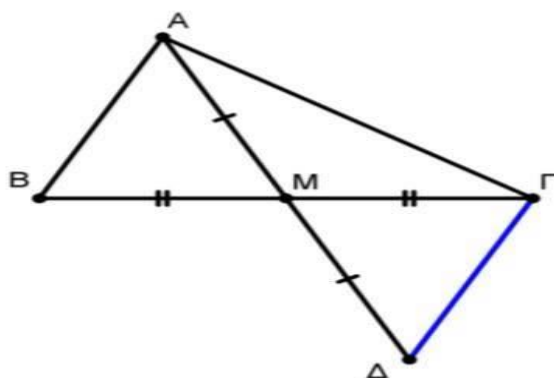
(Μονάδες 13)



1569

α) Τα τρίγωνα ABM και $MΓΔ$ έχουν:

- $AM = MΔ$, από υπόθεση
- $BM = MΓ$, αφού το M είναι μέσο της $BΓ$
- $\hat{A}MB = \hat{Δ}MΓ$, ως κατακορυφήν

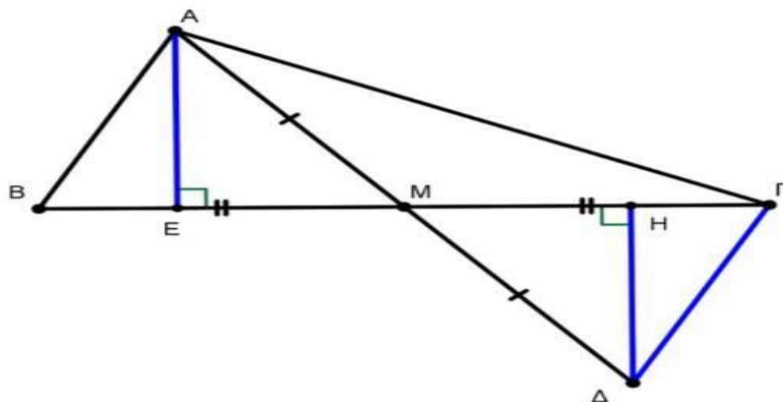


Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ABM και $MΓΔ$ είναι ίσα.

β) Ονομάζουμε AE και $ΔH$ τις αποστάσεις των σημείων A , $Δ$ από τη $BΓ$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AEM και $MΔH$, τα οποία είναι ορθογώνια και έχουν:

- $AM = MΔ$, από υπόθεση
- $\hat{A}MB = \hat{Δ}MΓ$ ως κατακορυφήν



Άρα τα τρίγωνα AEM και $MΔH$ είναι ίσα, οπότε ισχύει και $AE = ΔH$, εφόσον οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}MB = \hat{Δ}MΓ$.



1570

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

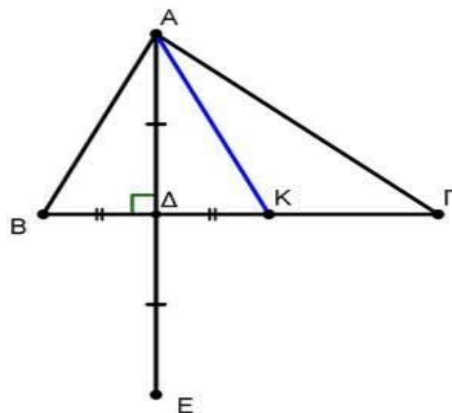
β) Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)



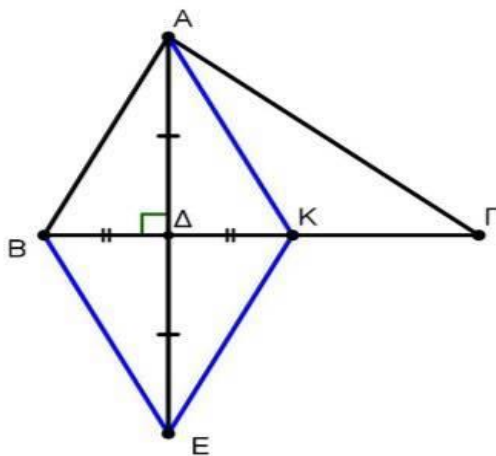
1570

α) Στο τρίγωνο ABK το AD είναι ύψος και διάμεσος, άρα η AD είναι η μεσοκάθετος του BK . Οπότε το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.



Μια άλλη πορεία λύσης είναι να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABD και AKD για να συμπεράνουμε ότι $AB=AK$.

β) Ισχύει ότι $DE = AD$, $BD = DK$ και $AE \perp BK$. Άρα στο τετράπλευρο $ABEK$ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι κάθετες, επομένως είναι ρόμβος.





1571

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^0$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A).

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB=BE$

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

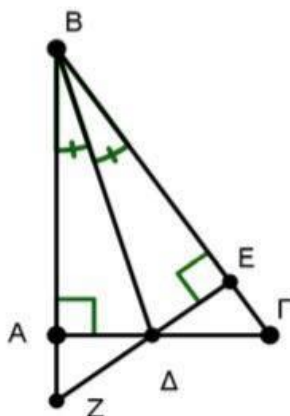


1571

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $BE\Delta$ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $B\Delta$ κοινή πλευρά
- $\hat{A}B\Delta = \hat{E}B\Delta$, αφού $B\Delta$ διχοτόμος της $\hat{B}$

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα. Άρα και οι αντίστοιχες πλευρές AB και BE θα είναι ίσες, δηλαδή $AB = BE$.



β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ορθογώνια και έχουν:

- κοινή τη γωνία $\hat{B}$
- $AB = BE$, όπως αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB έχουν μία οξεία γωνία και μία κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία, θα είναι ίσα.



ΘΕΜΑ 2ο

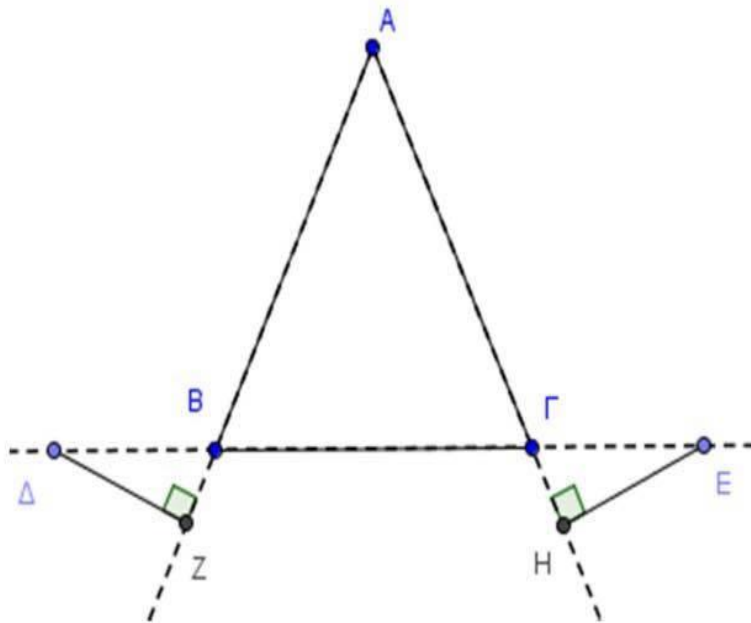
Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta=GE$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp AG$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ=GH$. (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH . (Μονάδες 8)



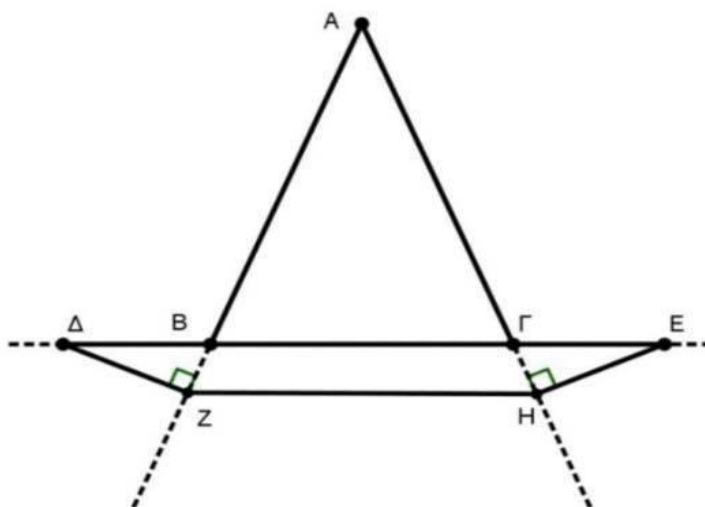


1572

α) i. Τα τρίγωνα ΔBZ και $E\Gamma H$ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $B\Delta = \Gamma E$, από υπόθεση
- $\widehat{\Delta BZ} = \widehat{E\Gamma H}$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ ($\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$).

Τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους BZ και ΓH ίσες, δηλ. $BZ = \Gamma H$.



ii. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $BZ = \Gamma H$, τότε $AB + BZ = A\Gamma + \Gamma H$, οπότε $AZ = AH$.

Άρα το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές με βάση τη ZH , είναι $\widehat{Z} = \widehat{H}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZH έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{Z} + \widehat{H} = 180^\circ, \text{ ή } 50^\circ + 2\widehat{Z} = 180^\circ, \text{ ή } 2\widehat{Z} = 130^\circ, \text{ οπότε } \widehat{Z} = 65^\circ = \widehat{H}$$



ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η AD είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της AD , ώστε $DE=AD$.

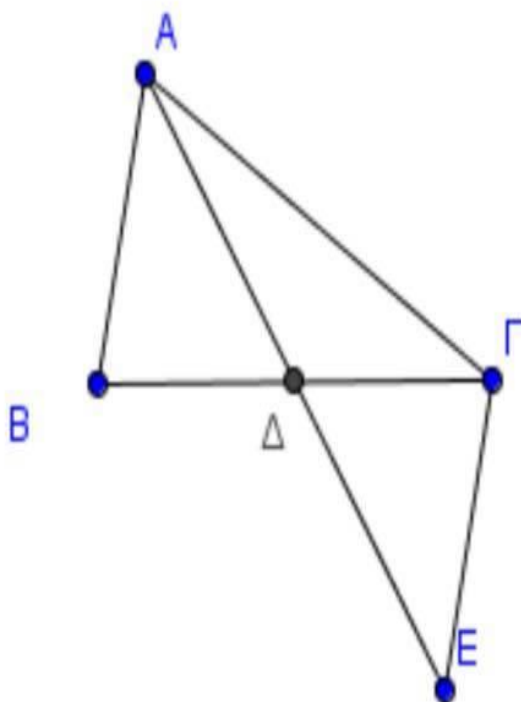
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = \Gamma E$

(Μονάδες 12)

β) $AE < AB + A\Gamma$

(Μονάδες 13)



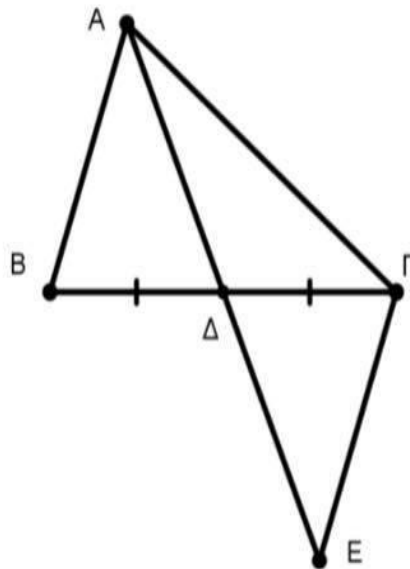


1573

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

- $A\Delta = \Delta E$
- $B\Delta = \Delta\Gamma$, διότι Δ μέσο της $B\Gamma$
- $\widehat{A\Delta B} = \widehat{E\Delta\Gamma}$ ως κατακορυφήν

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα, οπότε και οι πλευρές AB και ΓE , που βρίσκονται απέναντι από τις $\widehat{A\Delta B} = \widehat{E\Delta\Gamma}$, θα είναι ίσες. Δηλ. $AB = \Gamma E$ (1).



β) Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma E$, έχουμε $AE < \Gamma E + A\Gamma$ και λόγω του (α) έχουμε $AE < AB + A\Gamma$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
- β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE . (Μονάδες 12)

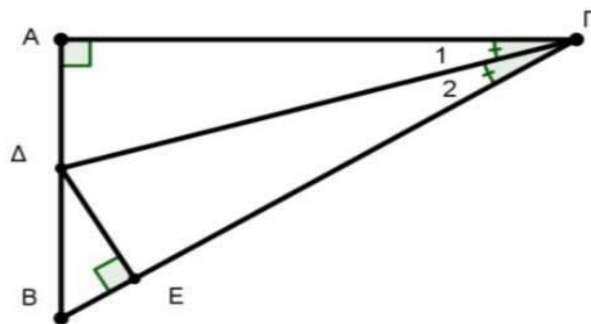


1574

α) Τα τρίγωνα $\triangle A\Delta\Gamma$ και $\triangle \Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνια και έχουν:

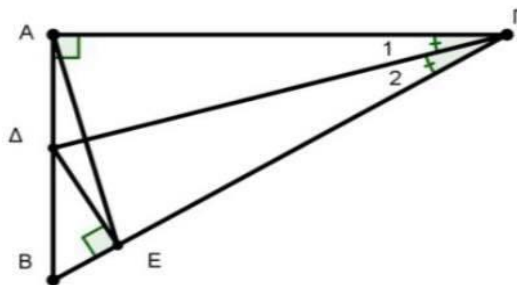
- $\Gamma\Delta$ κοινή πλευρά
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$, αφού $\Gamma\Delta$ διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$.

Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα κοινή και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μία οξεία γωνία του άλλου, θα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα $\triangle A\Delta\Gamma$ και $\triangle \Gamma\Delta E$ είναι ίσα, έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή $\Gamma A = \Gamma E$, οπότε, το Γ ισαπέχει από τα σημεία A, E .

Επειδή $\Delta A = \Delta E$, το σημείο Δ ισαπέχει από τα A, E . Άρα τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του AE , δηλαδή η $\Gamma\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AE .





ΘΕΜΑ 2

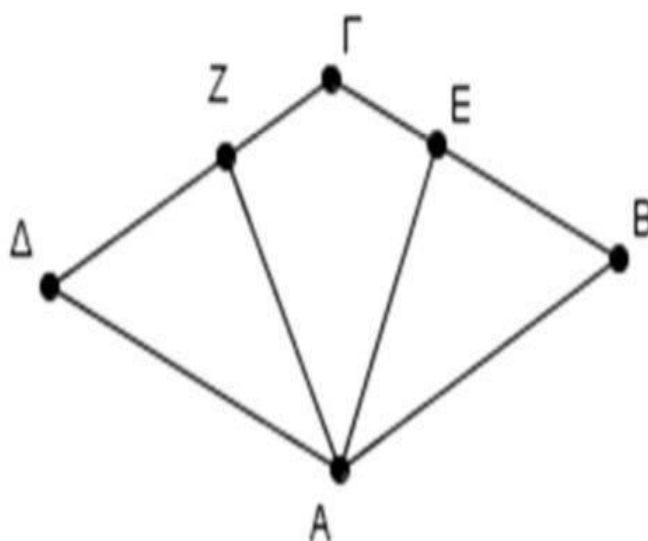
Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ=AE$. (Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ=AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)



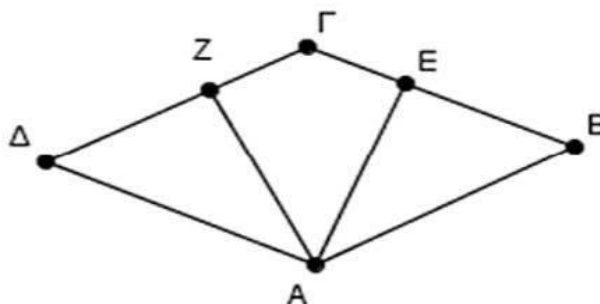


1575

α) Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. Τότε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB είναι ορθογώνια και έχουν:

- $AD = AB$ ως πλευρές του ρόμβου
- $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$, ως απέναντι γωνίες του ρόμβου

Οπότε έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν ίσες και τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες οξείες γωνίες, δηλαδή $AZ = AE$.



β) Έστω ότι στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ = AE$.

Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB είναι ορθογώνια και έχουν:

- $AZ = AE$ από υπόθεση
- $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου

Επειδή τα τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, θα είναι ίσα. Οπότε θα έχουν και τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή $AD = AB$.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, είναι ρόμβος

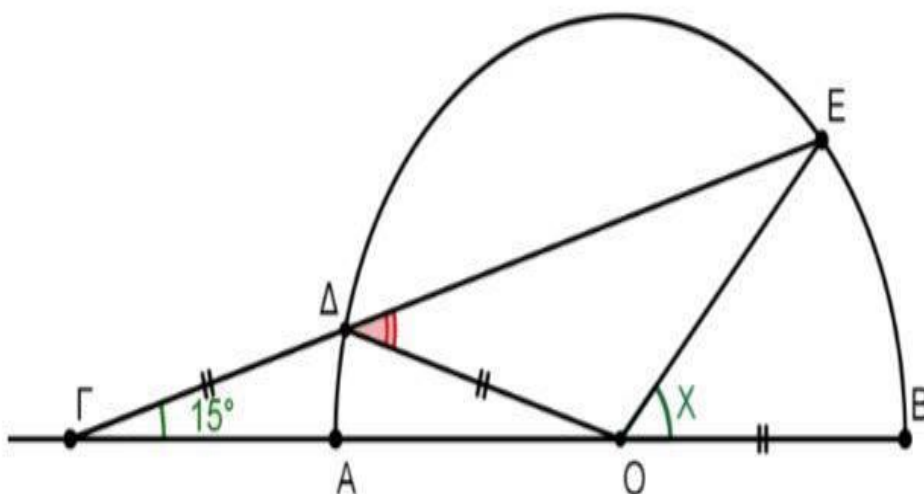


ΘΕΜΑ 2

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma \Delta$ είναι ίσο με το OB και η γωνία $\widehat{B\Gamma E}$ είναι 15° , τότε

α) να αποδείξετε ότι $\widehat{O\Delta E} = 30^\circ$ (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{E\hat{O}B} = x$. (Μονάδες 12)





1576

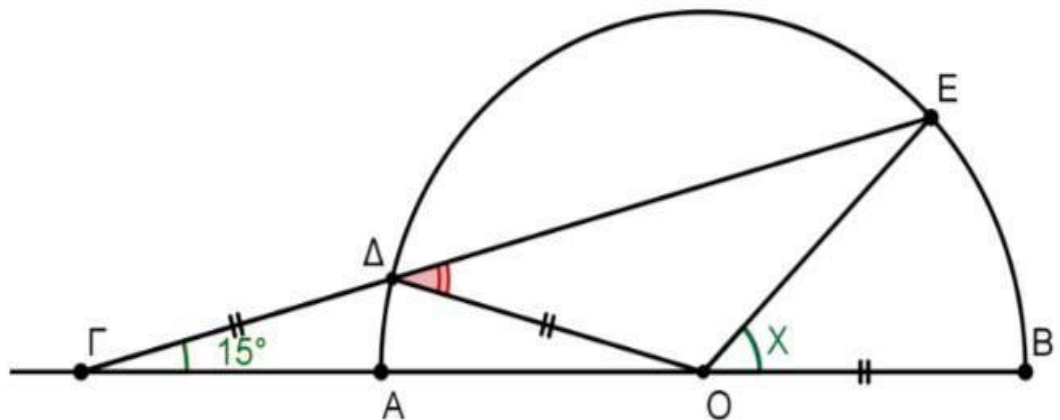
α) Έστω ρ η ακτίνα του ημικυκλίου.

Το τρίγωνο $ΟΓΔ$ είναι ισοσκελές διότι $ΟΔ = ΓΔ = \rho$.

Άρα $\widehat{ΟΔΑ} = \widehat{Γ} = 15^\circ$.

Η γωνία $\widehat{Δ}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΟΓΔ$,

άρα $\widehat{ΟΔΕ} = \widehat{ΟΔΑ} + \widehat{Γ} = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$



Το τρίγωνο $ΟΔΕ$ είναι ισοσκελές διότι $ΟΔ = ΟΕ = \rho$. Άρα $\widehat{Ε} = \widehat{ΟΔΕ} = 30^\circ$

Η γωνία $\widehat{ΒΟΕ}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΓΟΕ$, άρα

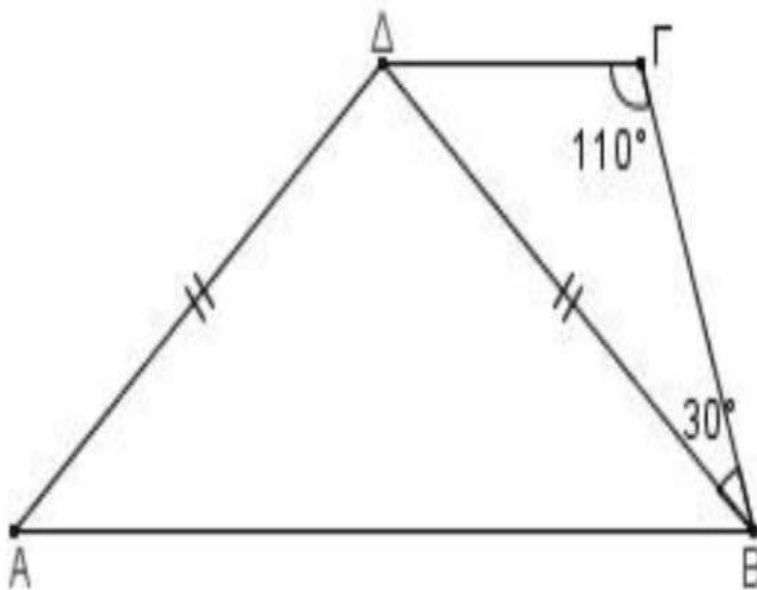
$\widehat{ΒΟΕ} = \widehat{Ε} + \widehat{Γ}$, δηλαδή $x = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά AD . Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A \Delta B}$.

(Μονάδες 25)





1577

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΓΒ βρίσκουμε:

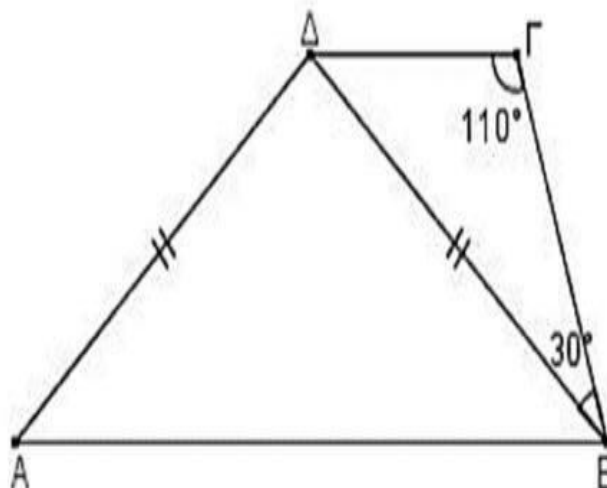
$$\widehat{\Gamma\Delta B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta\Gamma B} = 180^\circ, \text{ δηλαδή } \widehat{\Gamma\Delta B} + 110^\circ + 30^\circ = 180^\circ, \text{ οπότε } \widehat{\Gamma\Delta B} = 40^\circ$$

Είναι $\widehat{\Delta\Gamma A} = \widehat{\Gamma\Delta B} = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Επειδή ΔΑ = ΔΒ, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{A} = \widehat{\Delta\Gamma A} = 40^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΒ έχουμε:

$$\widehat{A\Delta B} + \widehat{A} + \widehat{\Delta\Gamma A} = 180 \text{ ή } \widehat{A\Delta B} + 2 \cdot 40^\circ = 180^\circ, \text{ οπότε } \widehat{A\Delta B} = 80^\circ$$



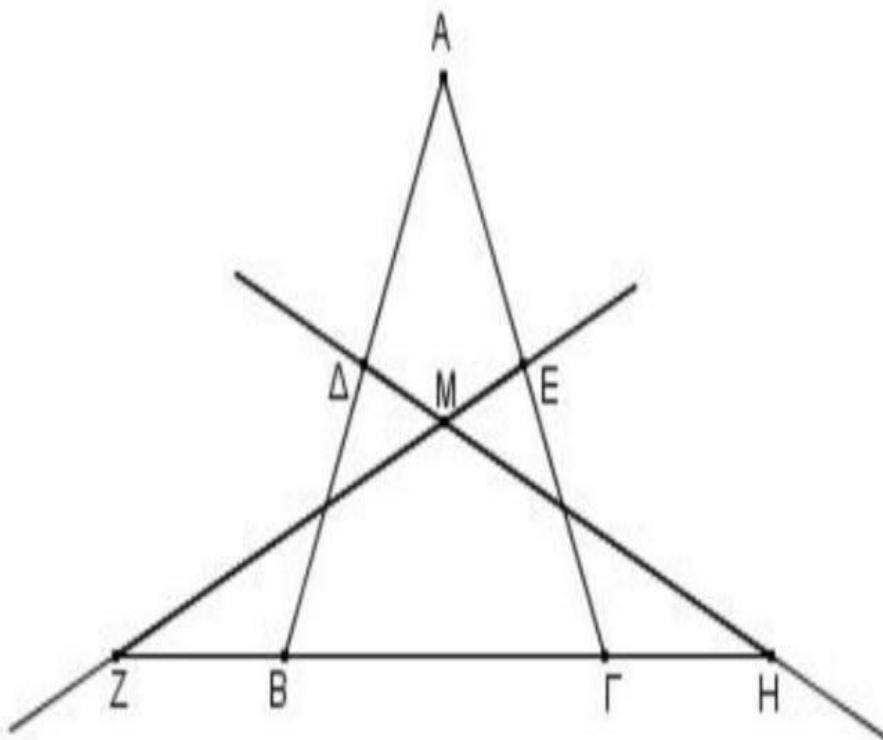


ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

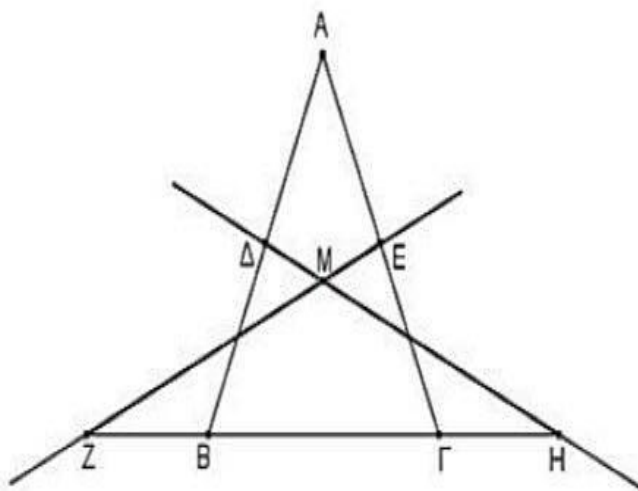




α) Τα τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $\Delta B = E\Gamma$ ως μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Επομένως, τα τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΔBH και $E\Gamma Z$ είναι ίσα, όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, άρα και $\hat{Z} = \hat{H}$. Επειδή το τρίγωνο MZH έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \Gamma E$ (Μονάδες 13)

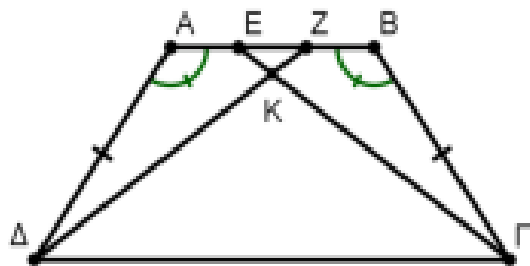
β) Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή (Μονάδες 12)



α) Τα τρίγωνα $\triangle A\Delta Z$ και $\triangle E\Gamma B$ έχουν:

- $AZ = BE$, διότι $AZ = AE + EZ = ZB + EZ = EB$
- $A\Delta = B\Gamma$, διότι $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο
- $\hat{A} = \hat{B}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τραπεζίου

Σύμφωνα με το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $\triangle A\Delta Z$ και $\triangle E\Gamma B$ είναι ίσα, οπότε έχουν ίσες και τις πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$, δηλαδή $\Delta Z = \Gamma E$ (1).



β) Από την ισότητα των τριγώνων $\triangle A\Delta Z$ και $\triangle E\Gamma B$, έχουμε ότι και οι αντίστοιχες γωνίες τους $\hat{K}\hat{E}Z$ και $\hat{K}\hat{Z}E$ θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{K}\hat{E}Z = \hat{K}\hat{Z}E$.

Οπότε το τρίγωνο $\triangle KEZ$ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $KZ = KE$ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και παίρνουμε:

$$\Delta Z - KZ = \Gamma E - KE, \text{ δηλαδή } K\Delta = K\Gamma$$

Οπότε το τρίγωνο $\triangle K\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 2

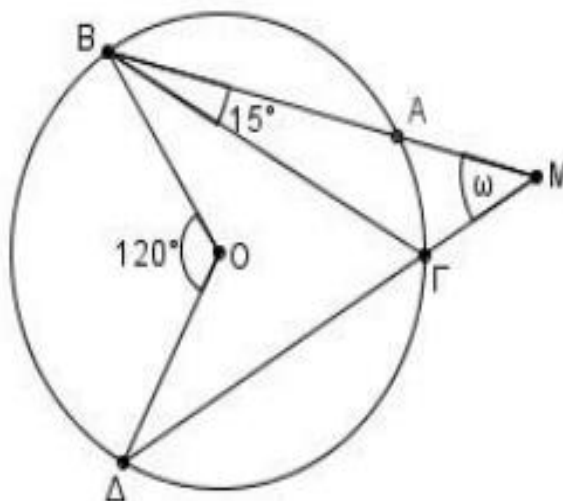
Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία $\widehat{B\hat{O}\Delta}$ είναι 120° και η γωνία $\widehat{\Gamma\hat{B}A}$ είναι 15° .

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45° .

(Μονάδες 13)

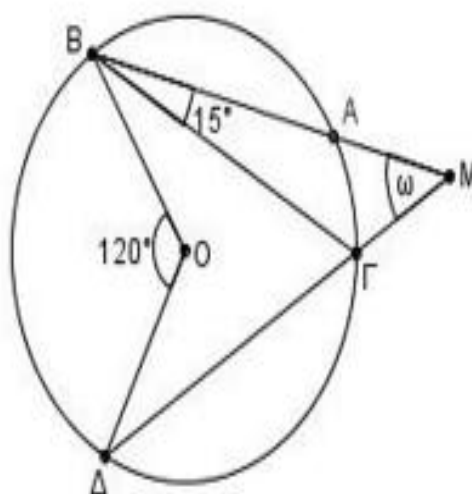




1580

α) Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$ και η επίκεντρη $\widehat{B\hat{O}\Delta}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα

$$\widehat{B\Gamma\Delta} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Delta}}{2} = 60^\circ.$$



β) Η γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Gamma M$, οπότε:

$$\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{B\Gamma M} + \widehat{M} = 60^\circ, \text{ οπότε } 60^\circ = 15^\circ + \widehat{M}. \text{ Άρα } \widehat{M} = 45^\circ$$



ΘΕΜΑ 2

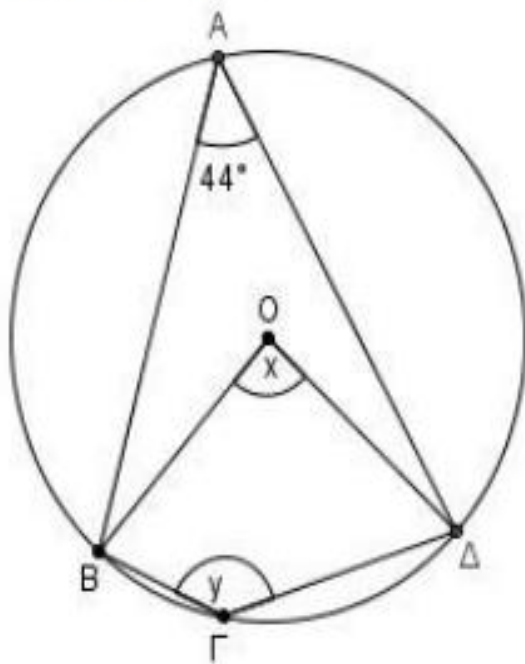
Σε κύκλο κέντρου O δίνονται οι χορδές AB και AD τέτοιες ώστε η γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{D}$ να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία x .

(12 Μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136° .

(13 Μονάδες)

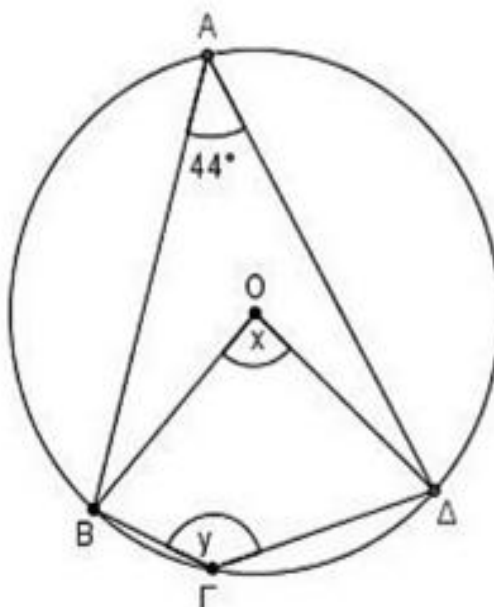




1581

α) Η επίκεντρη γωνία $\hat{x}$ και η εγγεγραμμένη $\widehat{B\hat{A}D}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα

$$\widehat{B\hat{A}D} = \frac{\widehat{B\hat{O}D}}{2}, \text{ οπότε θα είναι } \hat{x} = 2 \cdot 44 = 88^\circ.$$



β) Επειδή $\hat{x} = 88^\circ$ και το τόξο $\widehat{B\Gamma\Delta}$ έχει μέτρο 88° . Τότε για το τόξο $\widehat{BA\Delta}$ έχουμε:

$\widehat{BA\Delta} = 360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$. Η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{y}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{BA\Delta}$, άρα

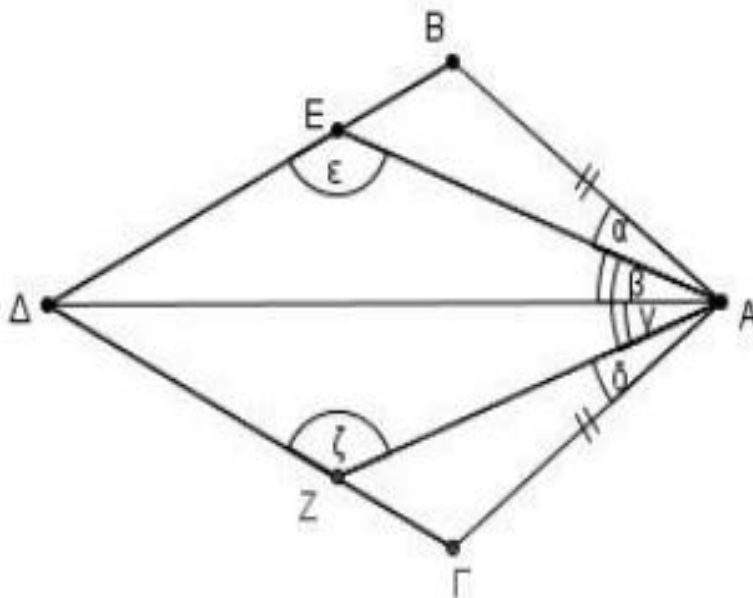
$$\hat{y} = \frac{272^\circ}{2} = 136^\circ.$$

ΘΕΜΑ 2

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = AG$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Delta$ είναι ίσα. (12 Μονάδες)

β) Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες. (13 Μονάδες)

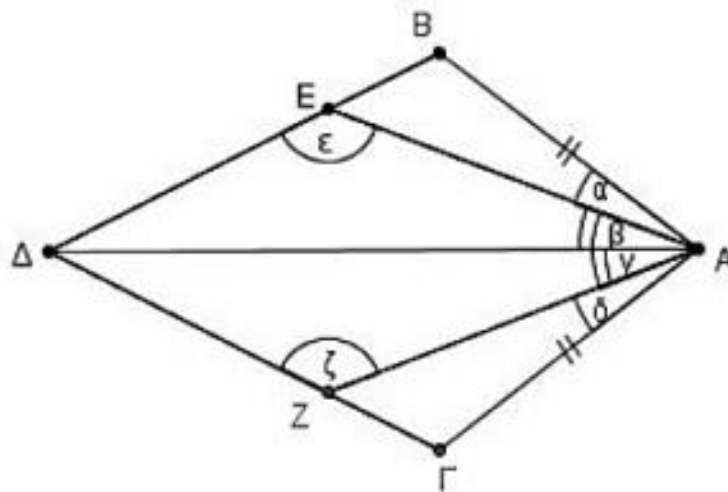




α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$, από υπόθεση
- $A\Delta$ κοινή πλευρά,
- $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$, ως άθροισμα των ίσων γωνιών $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$ και $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.



β) Τα τρίγωνα $E\Delta A$ και $Z\Delta A$ έχουν:

- $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$, από υπόθεση
- $A\Delta$ κοινή πλευρά,
- $\widehat{E\hat{\Delta}A} = \widehat{Z\hat{\Delta}A}$, επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

Από το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα $E\Delta A$ και $Z\Delta A$ είναι ίσα. Οπότε θα είναι ίσες και οι οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά $A\Delta$, δηλαδή $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

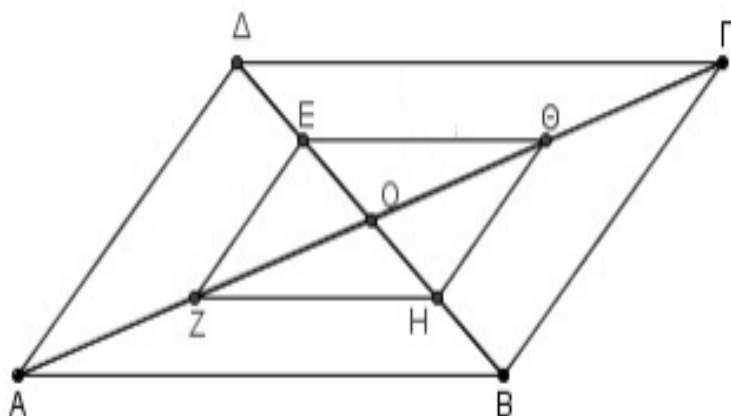


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του. Έστω E, Z, H, Θ τα μέσα των OD, OA, OB και OG αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

- α) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
- β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $EZH\Theta$. (Μονάδες 15)





1583

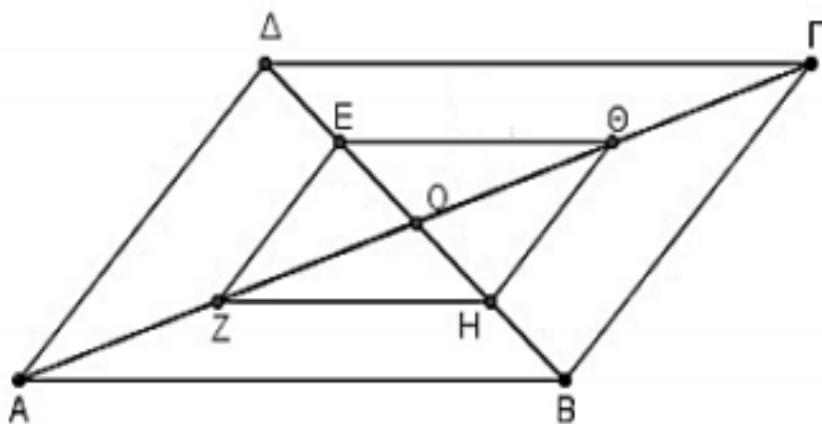
α) Τα E, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $O\Delta\Delta$, άρα $EZ = \frac{A\Delta}{2}$ (1).

Τα Z, H είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο OAB , άρα $ZH = \frac{AB}{2}$ (2).

Τα H, Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$, άρα $H\Theta = \frac{B\Gamma}{2}$ (3).

Τα E, Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $O\Delta\Delta$, άρα $E\Theta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (4).

Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$. Τότε από τις (1), (3) βρίσκουμε $ZH = E\Theta$ και από τις (2), (4) $EZ = \Theta H$, δηλαδή στο τετράπλευρο $EZH\Theta$ οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Επειδή η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, ισχύει ότι:

$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 40$. Τότε:

$$EZ + ZH + H\Theta + \Theta E = \frac{A\Delta}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{B\Gamma}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Delta + AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} = \frac{40}{2} = 20$$



ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

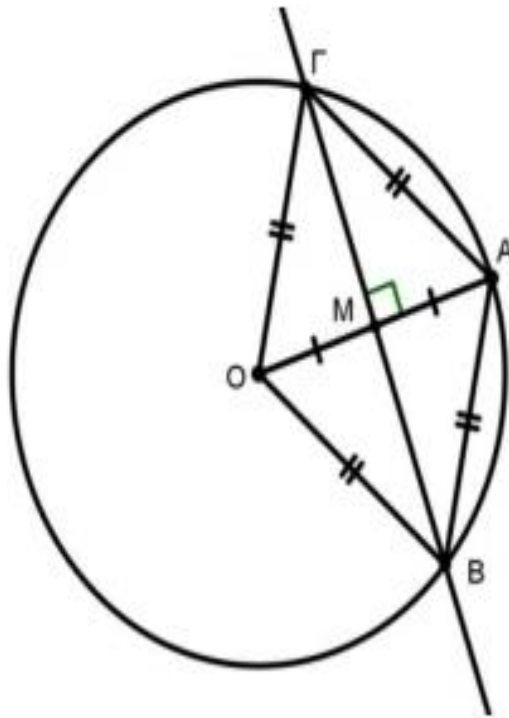
- α) Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)
- β) Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)



α) Αν ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε $OA = OB = OG = \rho$.

Στο τρίγωνο ABO το BM είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $AB = OB$.

Στο τρίγωνο ABO ισχύει $AB = OB = OA = \rho$, οπότε είναι ισόπλευρο.

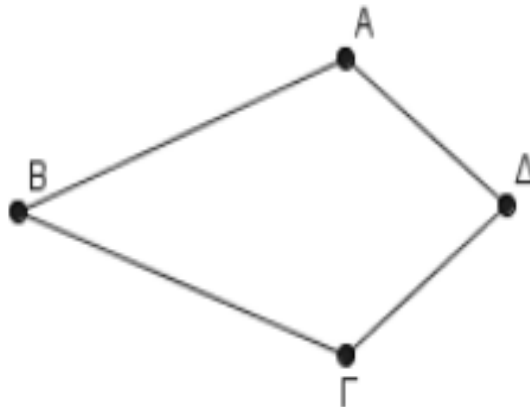


β) Στο τρίγωνο $ΓΑΟ$ το $ΓΜ$ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $ΑΓ = ΟΓ = \rho$. Τελικά, το τετράπλευρο $ΟΒΑΓ$ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ρόμβος.



ΘΕΜΑ 2

Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.



Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B\hat{A}\Gamma} = \hat{B\hat{\Gamma}A}$.

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

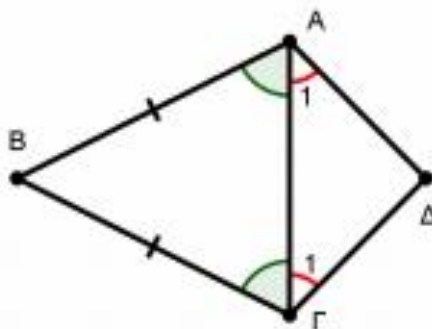
(Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 7)



α) Είναι $BA = BG$ οπότε το τρίγωνο BAG είναι ισοσκελές με βάση την AG . Άρα $\widehat{BAG} = \widehat{BGA}$.

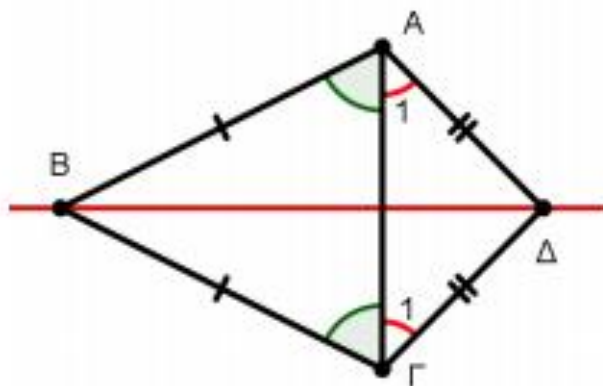


β) Επειδή $\widehat{BAD} = \widehat{BGA}$ και $\widehat{BAG} = \widehat{BGA}$, είναι και

$$\widehat{BAD} - \widehat{BAG} = \widehat{BGA} - \widehat{BGA}, \text{ οπότε } \widehat{A_1} = \widehat{D_1}.$$

Άρα το τρίγωνο DAG είναι ισοσκελές με βάση την AG και είναι $DA = DG$ (1).

γ) Επειδή $BA = BG$ και $DA = DG$, τα σημεία B, D ισαπέχουν από τα A, G . Άρα η BD είναι μεσοκάθετος του AG .





ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB, AG προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε M το μέσο του OA.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.

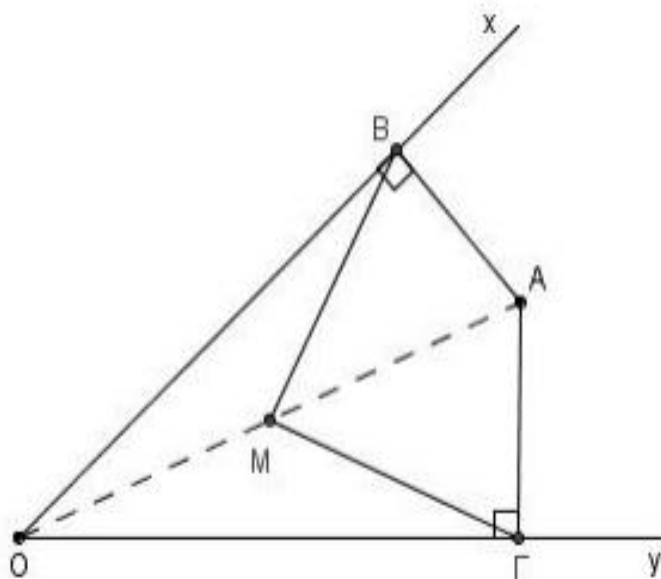
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο BMΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) $\widehat{BMA} = 2 \cdot \widehat{xOA}$

(Μονάδες 9)

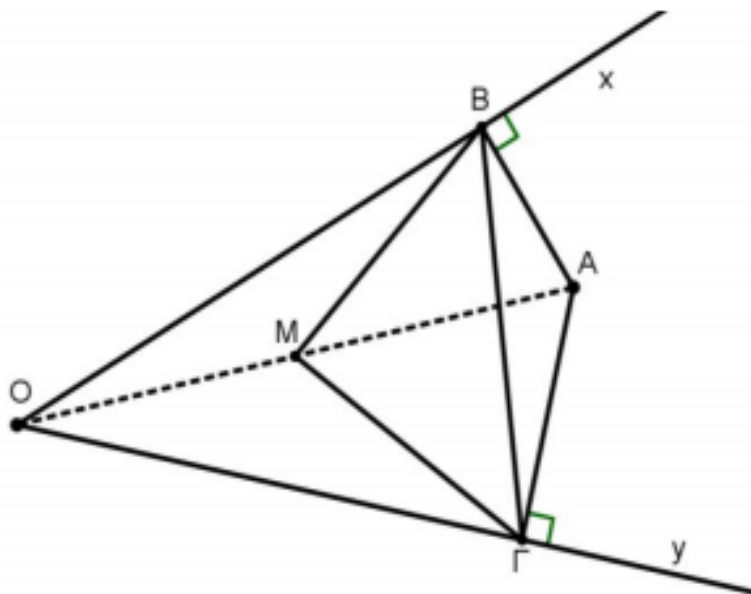




α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BOA , η BM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ισχύει ότι $BM = \frac{OA}{2} = MA$ (1). Άρα το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.

β) Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο AGO , η GM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $GM = \frac{OA}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $BM = GM$, άρα το τρίγωνο BGM είναι ισοσκελές.



β) Από την (1) ισχύει ότι: $BM = \frac{OA}{2} = OM$

Άρα το τρίγωνο OBM είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $\widehat{MOB} = \widehat{MBO}$.

Η γωνία $\widehat{BMA}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\widehat{BMO}$, άρα:

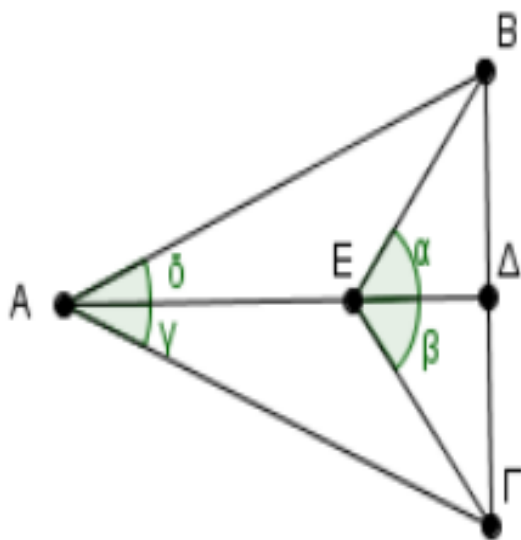
$$\widehat{BMA} = \widehat{MOB} + \widehat{MBO} = 2\widehat{MOB}, \text{ δηλαδή } \widehat{BMA} = 2 \cdot \widehat{MOB}$$



ΘΕΜΑ 2

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

- α) Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) Η ευθεία AD είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 9)



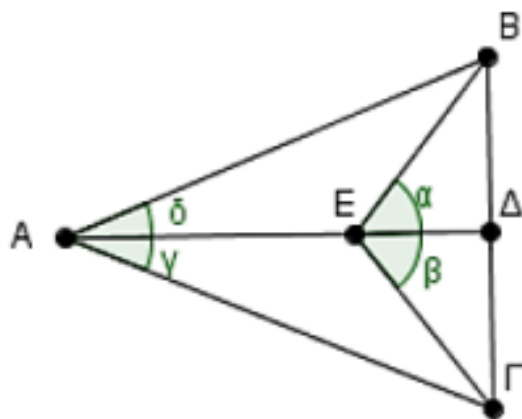


1587

α) Τα τρίγωνα AEB και AEG έχουν:

- AE κοινή πλευρά,
- $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, από υπόθεση
- $AB = AG$, από υπόθεση.

Από το κριτήριο ΠΓΠ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$ θα βρίσκονται ίσες πλευρές. Οπότε $EB = EG$ και το τρίγωνο EBG είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $AB = AG$, δηλαδή το A ισαπέχει από τα B και Γ οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του BG. Ισχύει ακόμη $EB = EG$, οπότε το E ισαπέχει από τα B, Γ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του BG. Επειδή τα A, E βρίσκονται στη μεσοκάθετο του BG, η AD είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.



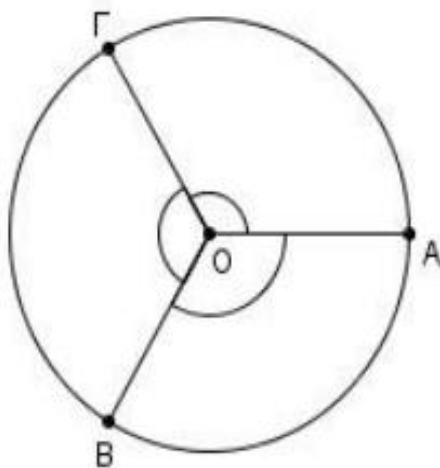
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες AOB , $BOΓ$ και $ΓOA$.

α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας AO διχοτομεί τη γωνία $BOΓ$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $ABΓ$ ως προς τις πλευρές του. (Μονάδες 8)

γ) Αν με κέντρο O και ακτίνα OK όπου K το μέσο της ακτίνας OA , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες OB και $OΓ$ στα σημεία $Λ$ και M αντίστοιχα, τότε τα τόξα KM και AB είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

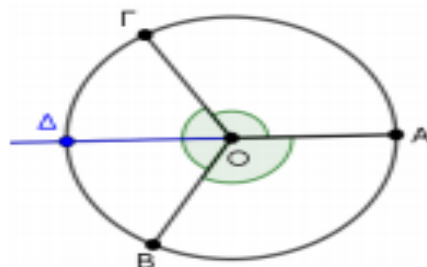




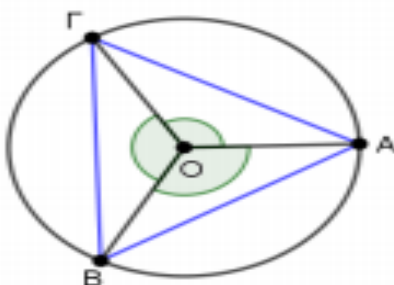
1588

α) Έστω ότι η προέκταση της OA τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ .

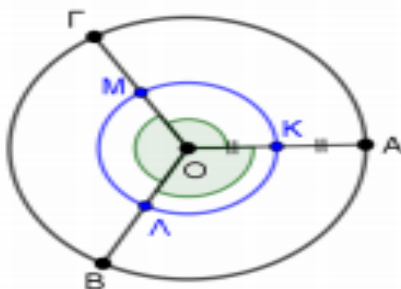
Ισχύει ότι: $\Gamma\hat{O}\Delta = 180^\circ - A\hat{O}\Gamma = 180^\circ - B\hat{O}A = B\hat{O}\Delta \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Delta$.



β) Επειδή οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ και $\Gamma\hat{O}A$ είναι ίσες και τα τόξα AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ είναι ίσα. Άρα και οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες. Οπότε $AB = B\Gamma = \Gamma A$. Συνεπώς το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.



γ) Ισχύει ότι δύο τόξα είναι ίσα, αν βρίσκονται στον ίδιο ή σε ίσους κύκλους και οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους είναι ίσες. Οι επίκεντρες γωνίες των τόξων αυτών είναι οι $M\hat{O}K$ και $A\hat{O}B$ και είναι ίσες. Οι κύκλοι όμως στους οποίους βρίσκονται τα τόξα δεν είναι ίσοι, άρα και τα τόξα δεν είναι ίσα.





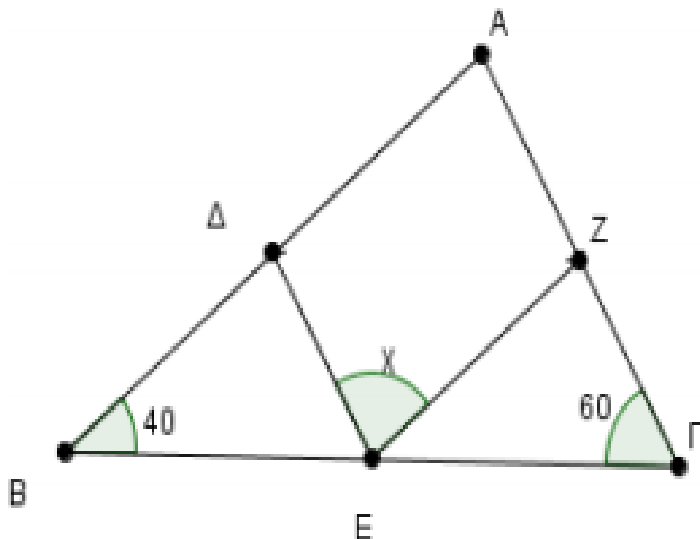
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και GA αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$ και $ZE \parallel AB$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$. (Μονάδες 8)

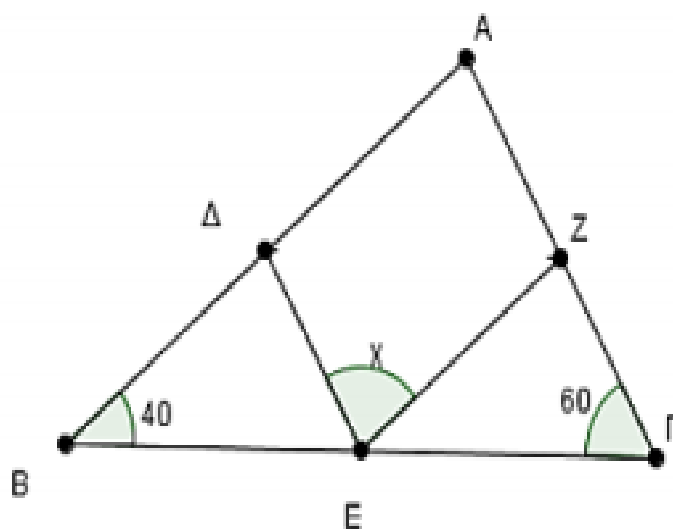




1589

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \hat{A} + 40^\circ + 60^\circ = 180^\circ, \text{ άρα } \hat{A} = 80^\circ$$



β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε ισχύει ότι $ΔΕ \parallel ΑΓ$.

Επίσης το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε: $ΕΖ \parallel ΑΒ$.

γ) Είναι $\hat{B}\hat{\Delta}Ε = \hat{A} = 80^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Ομοίως, είναι $\hat{B}\hat{Ε}\Delta = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΒΓ.

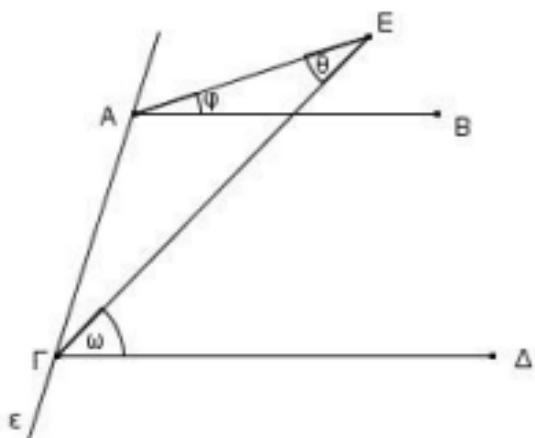


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθεία ϵ του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ϵ .

Να αποδείξετε ότι:

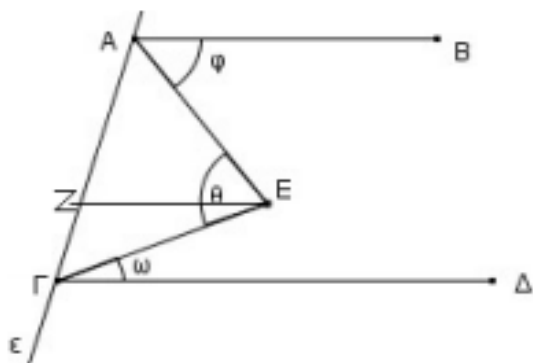
α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



(Μονάδες 10)

β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\omega} + \overset{\wedge}{\varphi}$$



(Μονάδες 15)

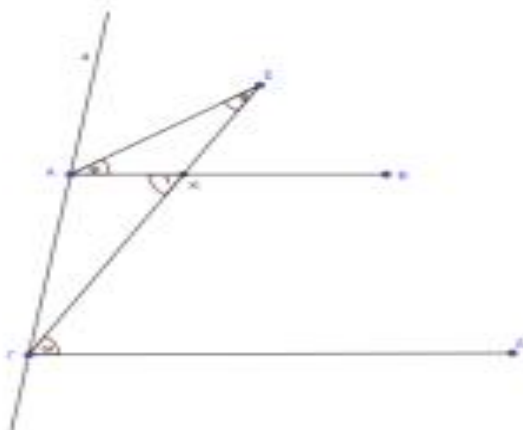


α) Έστω K το σημείο τομής των $ΕΓ$, $ΑΒ$. Είναι $\hat{K}_1 = \hat{\omega}$ (1)

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΒ$, $ΓΔ$ που τέμνονται από την $ΕΓ$.

Η γωνία $\hat{K}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΑΚΕ$, οπότε $\hat{K}_1 = \hat{\theta} + \hat{\varphi}$

Άρα λόγω της (1) βρίσκουμε $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



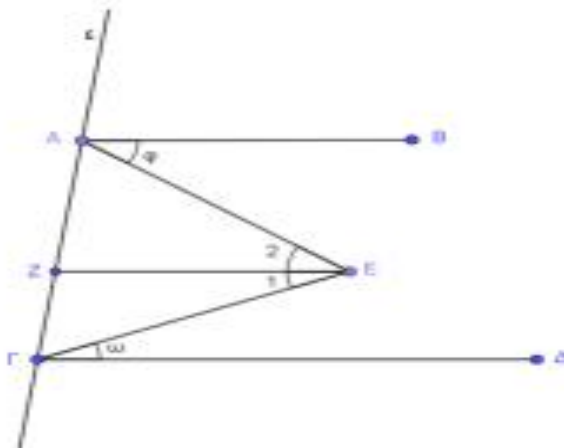
β) Είναι $\hat{\omega} = \hat{E}_1$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΕΖ$, $ΓΔ$ που τέμνονται από την $ΕΓ$.

Επίσης $\hat{\varphi} = \hat{E}_2$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΑΒ$, $ΕΖ$ που τέμνονται από την $ΑΕ$. Τότε

$\hat{\varphi} + \hat{\omega} = \hat{E}_2 + \hat{E}_1 = \hat{\theta}$





ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.

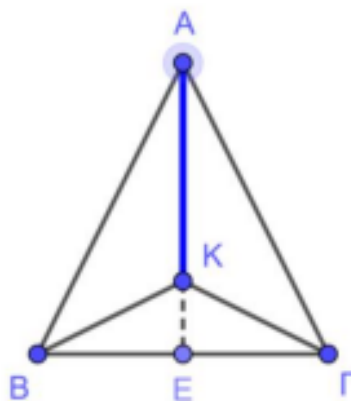
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

(Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.

(Μονάδες 7)

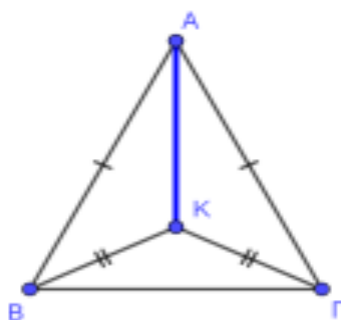




α) Τα τρίγωνα $ΒΑΚ$ και $ΚΑΓ$ έχουν:

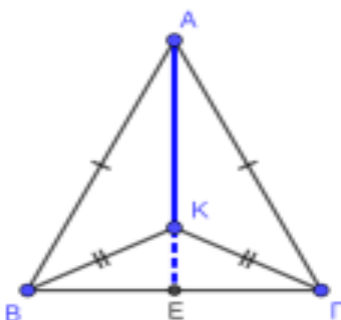
- $ΑΚ$ κοινή πλευρά,
- $ΑΒ = ΑΓ$, από υπόθεση
- $ΚΒ = ΚΓ$, από υπόθεση

Από το κριτήριο $\Pi - \Pi - \Pi$ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $ΒΑΚ$ και $ΚΑΓ$ είναι ίσα.



β) Τα τρίγωνα $ΒΑΚ$ και $ΚΑΓ$ είναι ίσα, οπότε και οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις $ΒΚ$ και $ΚΓ$ είναι ίσες, δηλαδή ισχύει $\widehat{ΒΑΚ} = \widehat{ΚΑΓ}$. Άρα η $ΑΚ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Γ$.

γ) Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές η διχοτόμος $ΑΚ$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$, άρα το $Ε$ είναι μέσον του τμήματος $ΒΓ$. Τελικά η $ΚΕ$ είναι διάμεσος του $ΒΚΓ$.





ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) . Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

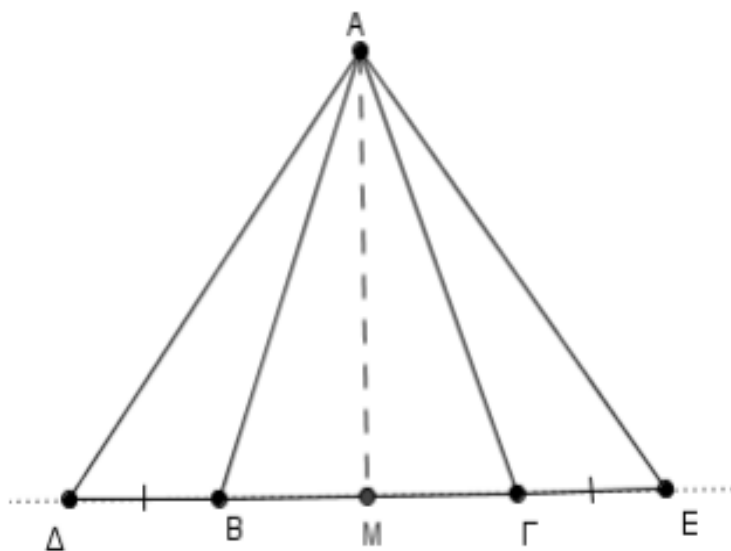
Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B_{\varepsilon\xi}} = \widehat{\Gamma_{\varepsilon\xi}}$ (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 7)





α) Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ επειδή $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο με βάση $B\Gamma$. Τότε:

$$\hat{B}_{εξ} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{εξ}$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

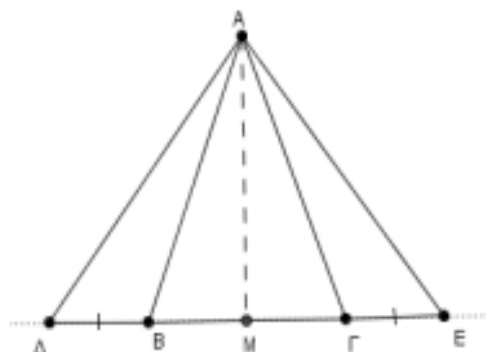
- $AB = A\Gamma$,
- $B\Delta = \Gamma E$,
- $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$

Από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

γ) Είναι $BM = M\Gamma$, αφού M μέσο της $B\Gamma$ και $B\Delta = \Gamma E$, από υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$BM + B\Delta = M\Gamma + \Gamma E \Leftrightarrow \Delta M = ME$$

Επομένως το M είναι μέσο του ΔE , δηλαδή η AM είναι διάμεσος του ΔE .





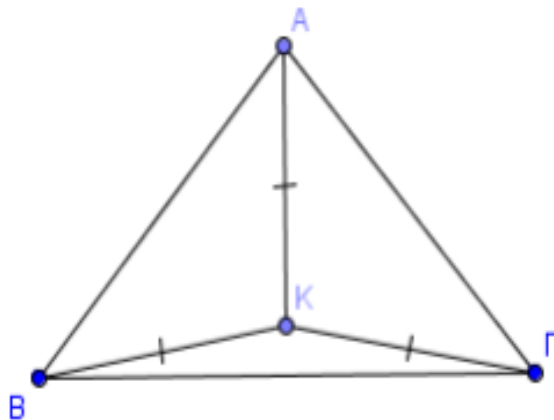
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB=KA=K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{ABK}$ και $\widehat{AGK}$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$. (Μονάδες 7)

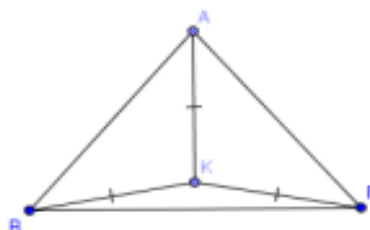




α) Τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ έχουν:

- ΚΑ κοινή πλευρά
- ΒΚ = ΚΓ, από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ, διότι ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο.

Από το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.



β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, ισχύει ότι $\widehat{B} = \widehat{G}$ (1)

Επειδή η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, ισχύει ότι:

$$\widehat{B\hat{A}K} = \widehat{K\hat{A}G} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

Επειδή ΚΒ = ΚΑ, το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές. Όμοια, επειδή ΚΑ = ΚΓ και το τρίγωνο ΑΓΚ είναι ισοσκελές. Άρα

$$\widehat{A\hat{B}K} = \widehat{B\hat{A}K} = 40^\circ \quad \text{και} \quad \widehat{K\hat{G}A} = \widehat{K\hat{A}G} = 40^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΚ έχουμε:

$$\widehat{A\hat{K}B} + \widehat{A\hat{B}K} + \widehat{B\hat{A}K} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{K}B} + 2 \cdot 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{K}B} = 100^\circ$$

Όμοια από το τρίγωνο ΑΓΚ βρίσκουμε ότι $\widehat{A\hat{K}G} = 100^\circ$.

γ) Είναι

$$\widehat{B\hat{K}G} + \widehat{A\hat{K}B} + \widehat{A\hat{K}G} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{K}G} + 100^\circ + 100^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{B\hat{K}G} + 200^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{K}G} = 160^\circ$$



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος DE της γωνίας $A\hat{B}\Delta$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$ και $E\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$

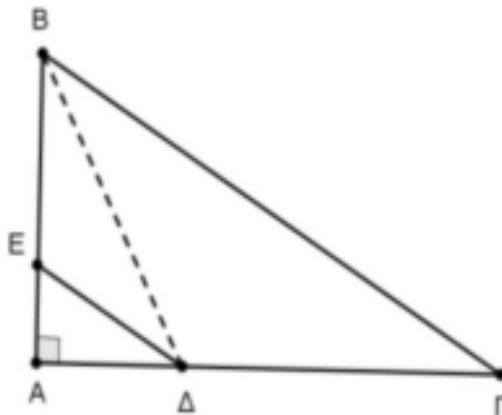
(Μονάδες 4 + 4)

ii) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Αν $A\hat{\Delta}B = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 9)





α) i) Ισχύει ότι:

- $\widehat{E\Delta B} = \widehat{\Delta B\Gamma}$ (1), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $B\Delta$
- $\widehat{E\Delta A} = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$

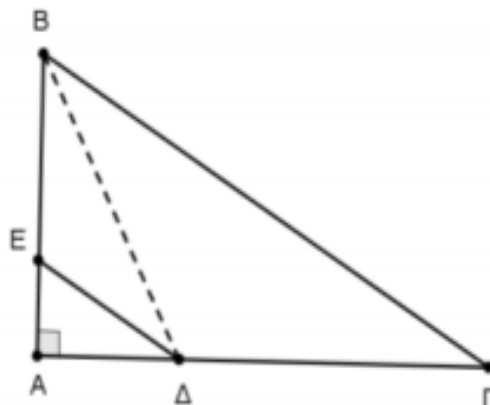
ii) Ισχύει ότι $\widehat{E\Delta B} = \widehat{E\Delta A}$ (3), διότι η ΔE είναι διχοτόμος της $A\Delta B$.

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\widehat{\Delta B\Gamma} = \hat{\Gamma}$ (4)

Άρα το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Delta B = \Delta\Gamma$.

β) Η $A\Delta B$ είναι εξωτερική του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ οπότε ισχύει $\widehat{A\Delta B} = \hat{\Gamma} + \widehat{\Delta B\Gamma}$

Λόγω της (4) βρίσκουμε $60^\circ = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$





ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma\chi$, κάθετη στη $B\Gamma$, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{\Delta}A$.

(Μονάδες 12)

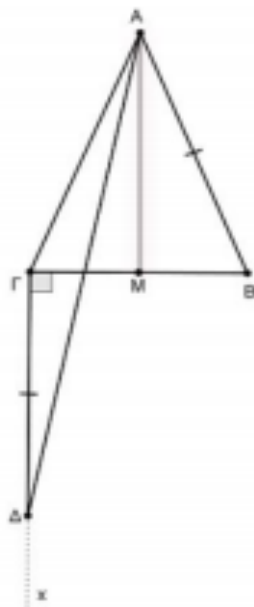
β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\Gamma\Delta \parallel AM$

(Μονάδες 6)

ii) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

(Μονάδες 7)



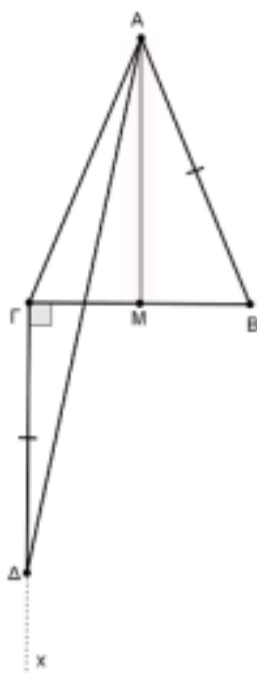


α) Είναι $ΓΔ = ΑΒ$ από υπόθεση και $ΑΒ = ΑΓ$ επειδή $ΑΒΓ$ ισοσκελές τρίγωνο, οπότε $ΓΔ = ΑΓ$.

Άρα το $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση την $ΑΔ$. Συνεπώς $\widehat{ΔΑΓ} = \widehat{ΓΔΑ}$.

β) i) Επειδή το $ΑΜ$ είναι ύψος του τριγώνου ισχύει ότι $ΑΜ \perp ΒΓ$. Επίσης, από υπόθεση $ΓΔ \perp ΒΓ$, άρα $ΓΔ \parallel ΑΜ$.

ii) Είναι $\widehat{ΓΔΑ} = \widehat{ΜΑΔ}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ΓΔ$, $ΑΜ$ που τέμνονται από την $ΑΔ$. Ισχύει ακόμη από το ερώτημα (α) ότι $\widehat{ΔΑΓ} = \widehat{ΓΔΑ}$ οπότε είναι $\widehat{ΔΑΓ} = \widehat{ΜΑΔ}$. Τελικά η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΜΑΓ$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\widehat{A_{\text{εξ}}} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{AB\Delta} = 60^\circ$

(Μονάδες 5)

ii. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

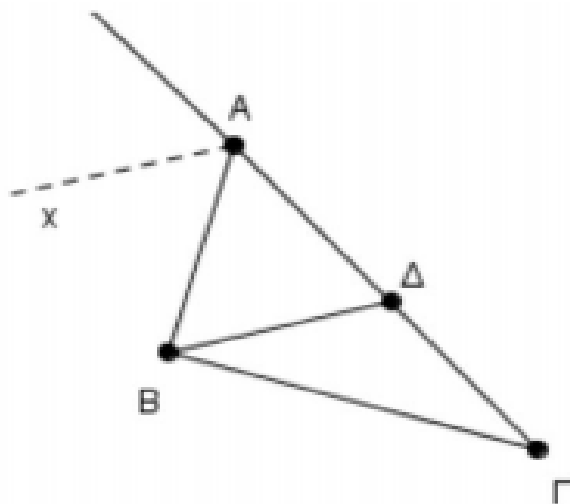
(Μονάδες 5)

iii. $A\Gamma - AB = \Delta\Gamma$

(Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία $\widehat{B\Delta A}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)





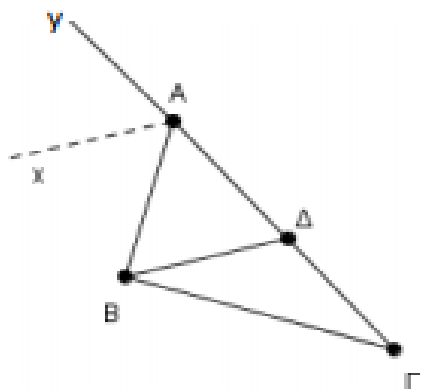
α) i. Είναι $\widehat{A\Delta B} = \gamma\widehat{A\chi} = \frac{\widehat{A\epsilon\xi}}{2} = 60^\circ$

ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\chi$, $B\Delta$ που τέμνονται από την $A\Delta$.

Επίσης $\widehat{A\bar{B}\Delta} = \chi\widehat{A\bar{B}} = \frac{\widehat{A\epsilon\xi}}{2} = 60^\circ$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\chi$, $B\Delta$ που τέμνονται από την AB .

ii. Επειδή στο τρίγωνο $AB\Delta$ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60° , θα είναι και η τρίτη του γωνία 60° οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



iii. Επειδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $AB = A\Delta = B\Delta$.

Τότε $\Delta\Gamma = A\Gamma - A\Delta = A\Gamma - AB$.

β) Είναι $\widehat{B\bar{\Delta}A} = 60^\circ$ και $\widehat{B\bar{\Delta}A} = 2\bar{\Gamma} \Leftrightarrow \bar{\Gamma} = 30^\circ$

Επίσης $\widehat{B\bar{\Delta}\Gamma} = 180^\circ - \widehat{B\bar{\Delta}A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $B\Delta\Gamma$, βρίσκουμε:

$$\widehat{\Delta\bar{B}\Gamma} + \bar{\Gamma} + \widehat{B\bar{\Delta}\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\bar{B}\Gamma} + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\Delta\bar{B}\Gamma} + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\bar{B}\Gamma} = 30^\circ$$



ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και GA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $AD=AB$ και $AE=AG$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) $ED \parallel B\Gamma$

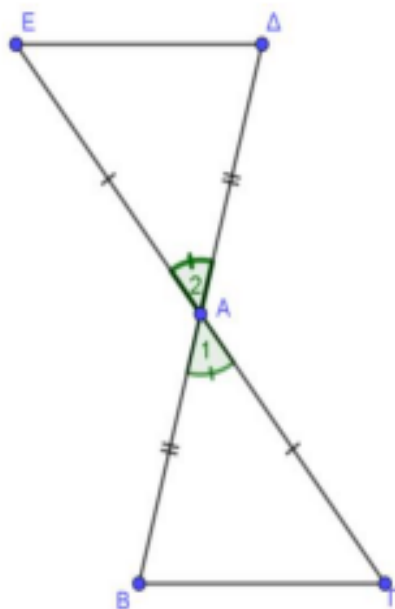
(Μονάδες 13)



α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν:

- $A\Delta = AB$ από υπόθεση,
- $AE = A\Gamma$ από υπόθεση,
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, ως κατακορυφήν

Από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.



β) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ προκύπτει ότι και οι αντίστοιχες γωνίες $\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες, δηλαδή $\hat{E} = \hat{\Gamma}$.

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $E\Gamma$. Και αφού οι γωνίες αυτές είναι ίσες, οι ΔE , $B\Gamma$ είναι παράλληλες.



ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΕ = ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.

(Μονάδες 7)

ii. $ΖΔ = \frac{ΕΔ}{2}$

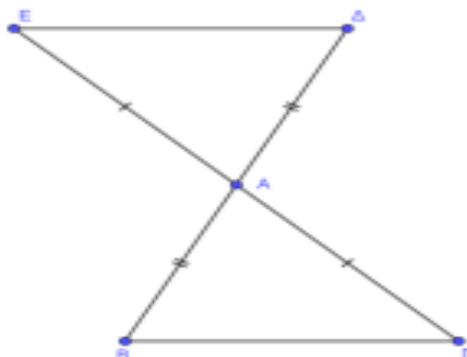
(Μονάδες 6)



α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν:

- $A\Delta = AB$ από υπόθεση,
- $AE = A\Gamma$ από υπόθεση,
- $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{A}E}$ ως κατακορυφήν

Από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.



β) i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM έχουν:

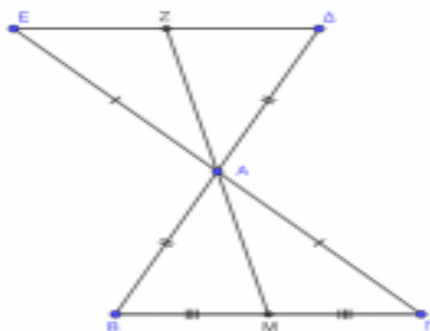
- $A\Delta = AB$ από υπόθεση,
- $\widehat{B\hat{A}M} = \widehat{\Delta\hat{A}Z}$ ως κατακορυφήν,
- $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ από τα ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$.

Από το κριτήριο $\Gamma - \Pi - \Gamma$ τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

ii. Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι και οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B\hat{A}M}$ και $\widehat{\Delta\hat{A}Z}$ είναι ίσες, δηλαδή $Z\Delta = BM$. Τότε

$$Z\Delta = BM \Leftrightarrow Z\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{E\Delta}{2} \quad (1)$$

διότι $B\Gamma = E\Delta$ αφού τα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα τρίγωνα.





ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = M\Gamma$. (Μονάδες 12)

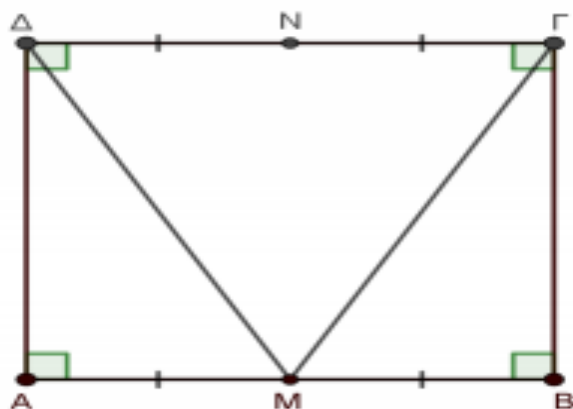
β) Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)



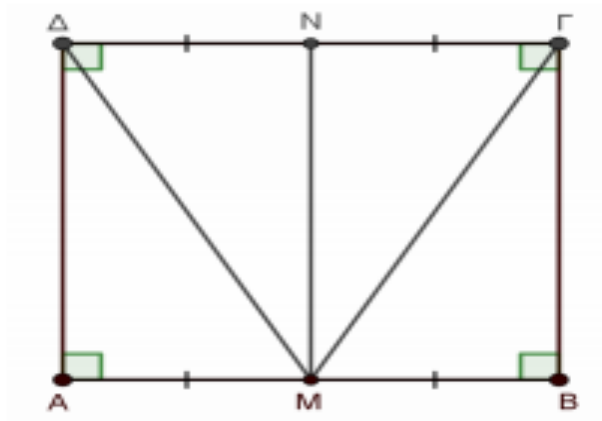
α) Τα τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΜΒΓ$ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$, ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
- $ΑΜ = ΜΒ$, διότι το $Μ$ είναι μέσο του $ΑΒ$.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΜΒΓ$ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι υποτείνουσές τους είναι ίσες, δηλαδή $ΜΔ = ΜΓ$.



β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΜΓΔ$ το ευθύγραμμο τμήμα $ΜΝ$ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος. Άρα το $ΜΝ$ είναι μεσοκάθετος του $ΔΓ$.





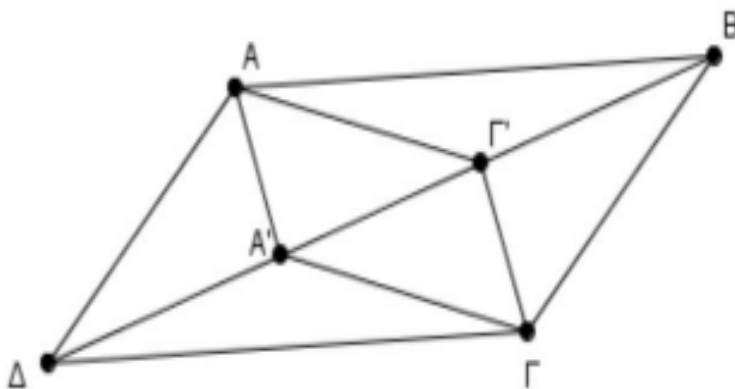
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A' , Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ (Μονάδες 8)

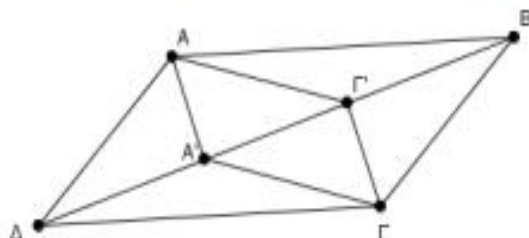
β) $AA' = \Gamma\Gamma'$ (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)





α) Επειδή $AA' \perp BD$ και $\Gamma\Gamma' \perp BD$, προκύπτει ότι $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$



β) Τα τρίγωνα $AA'\Delta$ και $\Gamma\Gamma'B$ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$, διότι είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $\widehat{A\Delta A'} = \widehat{\Gamma B \Gamma'}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται από την BD .

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $AA'\Delta$ και $\Gamma\Gamma'B$ έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A\Delta A'}$ και $\widehat{\Gamma B \Gamma'}$ είναι ίσες, δηλαδή $AA' = \Gamma\Gamma'$.

γ) Επειδή $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ και $AA' = \Gamma\Gamma'$,

το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB=MG$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

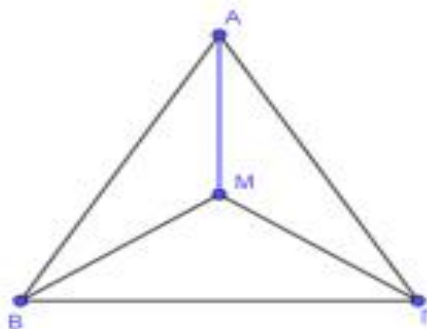
β) Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BM\Gamma}$. (Μονάδες 13)



α) Τα τρίγωνα BAM και MAG έχουν:

- AM κοινή πλευρά,
- $AB = AG$ αφού ABG ισοσκελές τρίγωνο,
- $MB = MG$ από υπόθεση.

Από το κριτήριο $\Pi - \Pi - \Pi$ τα τρίγωνα BAM και MAG είναι ίσα.

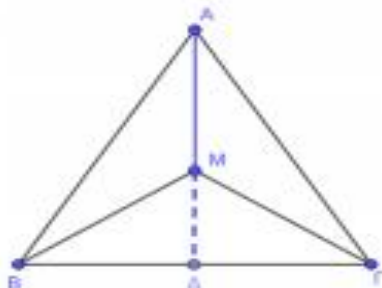


β) Επειδή τα τρίγωνα BAM και MAG είναι ίσα θα είναι ίσες και οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AB και AG , δηλαδή ισχύει $\widehat{AMB} = \widehat{AMG}$. Τότε είναι

$$\widehat{BMD} = \widehat{DMG} \quad (1)$$

ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{AMB}$ και $\widehat{AMG}$.

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι η AM διχοτομεί την $B\widehat{M}G$.



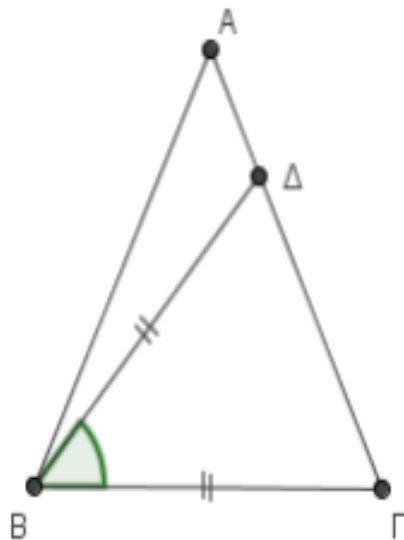


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς AG , τέτοιο ώστε $B\Delta=B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)





α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 65^\circ.$$

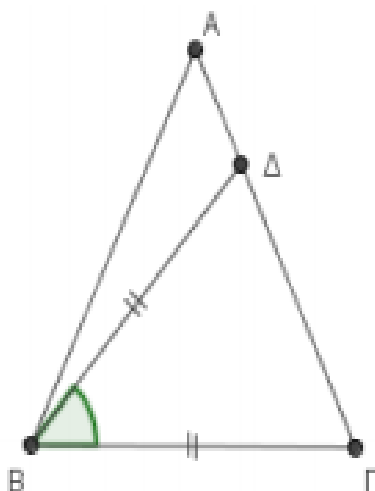
Άρα και $\hat{\Gamma} = 65^\circ$.

β) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές διότι $B\Delta = B\Gamma$. Τότε $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{\Gamma} = 65^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{\Delta B\Gamma} + \hat{B\Delta\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta B\Gamma} + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta B\Gamma} + 130^\circ = 180^\circ$$

Άρα $\hat{\Delta B\Gamma} = 50^\circ = \hat{A}$



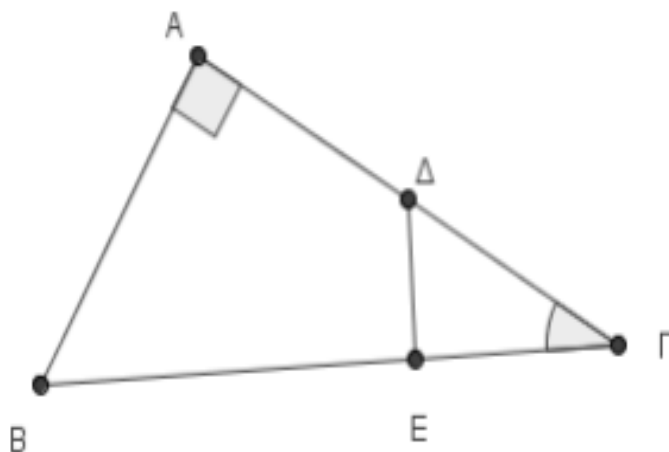


ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς AG και $DE \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

- α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$. (Μονάδες 10)
β) τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta E B$. (Μονάδες 15)





α) Επειδή $\Delta E \perp B\Gamma$ είναι $\Delta \hat{E}\Gamma = 90^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $\Delta E\Gamma$, έχουμε:

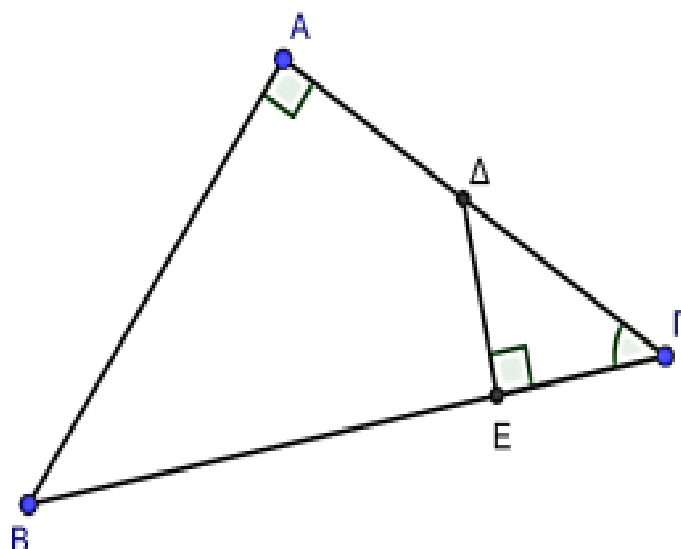
$$\Delta \hat{E}\Gamma + \Delta \hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta \hat{E}\Gamma + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta \hat{E}\Gamma = 50^\circ$$

β) Είναι $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$. Οι γωνίες $A\hat{\Delta}E$ και $E\hat{\Delta}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές οπότε:

$$A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 130^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{B} + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 50^\circ$$





ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\widehat{\Delta A \Gamma}$. (Μονάδες 15)



α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ$$

Τότε και $\hat{\Gamma} = 70^\circ$.

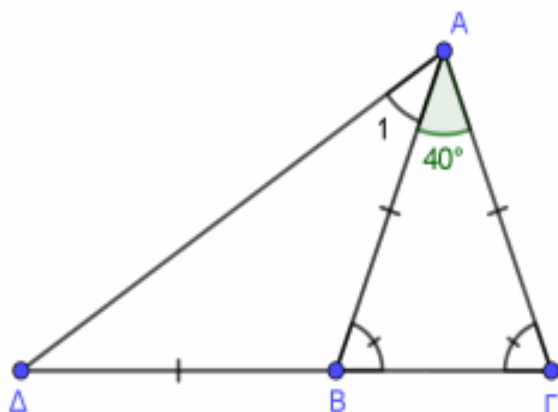
β) Επειδή $BD = AB$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, άρα ισχύει $\hat{\Delta} = \hat{A}_1$.

Η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Delta$, οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, δηλαδή

$$\hat{B} = \hat{\Delta} + \hat{A}_1 \Leftrightarrow 70^\circ = 2\hat{\Delta} \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 35^\circ \text{ οπότε και } \hat{A}_1 = 35^\circ$$

Ισχύει ότι

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{A} + \hat{A}_1 = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$$





ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω ότι η AD είναι η διχοτόμος της γωνίας A και η $DE \parallel AB$. Αν η γωνία $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$,

α) να υπολογίσετε:

I. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

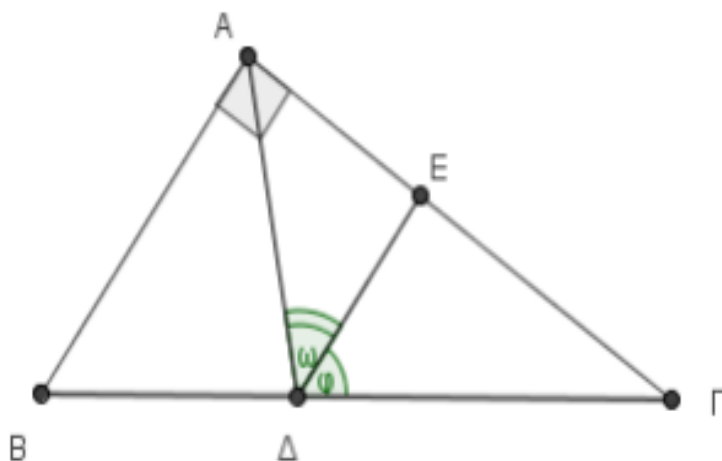
(Μονάδες 8)

II. τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 10)

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)





α) i. Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ, έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$$

Τότε

$$\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma} = 20^\circ + 35^\circ = 55^\circ$$

ii. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, ισχύει ότι $\hat{B\hat{A}D} = \hat{D\hat{A}G} = 45^\circ$

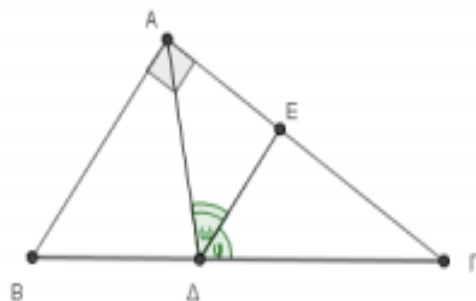
$$\text{Είναι } \hat{\omega} = \hat{B\hat{A}D} = 45^\circ$$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΓ

$$\text{Επίσης } \hat{\varphi} = \hat{B} = 55^\circ$$

ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΓ.

β) Επειδή $\hat{\omega} = \hat{D\hat{A}G} = 45^\circ$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.





ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και σημείο M μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

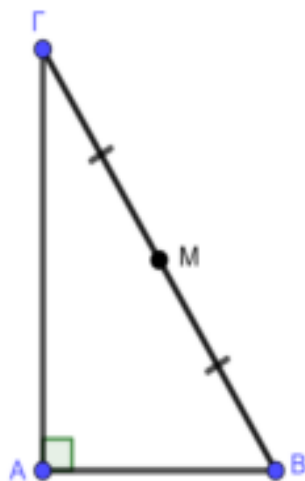
(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη γωνία $\hat{AM\Gamma}$.

(Μονάδες 9)





α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκουμε:

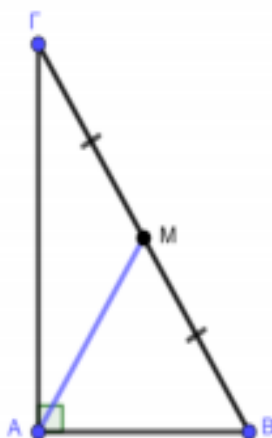
$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$$

Από υπόθεση ισχύει $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ άρα $\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$

β) Η ΑΜ είναι διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας του τριγώνου ΑΒΓ οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ισχύει

$$AM = \frac{BG}{2} = MG$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.



γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με $MA = MG$ ισχύει ότι $\hat{MAG} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΜΓ, βρίσκουμε

$$\hat{AMG} + \hat{MAG} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AMG} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AMG} = 120^\circ$$



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = AG = GE$ και $\widehat{BAG} = 40^\circ$.

Να αποδείξετε ότι

α) $\widehat{ABD} = \widehat{AGE} = 110^\circ$.

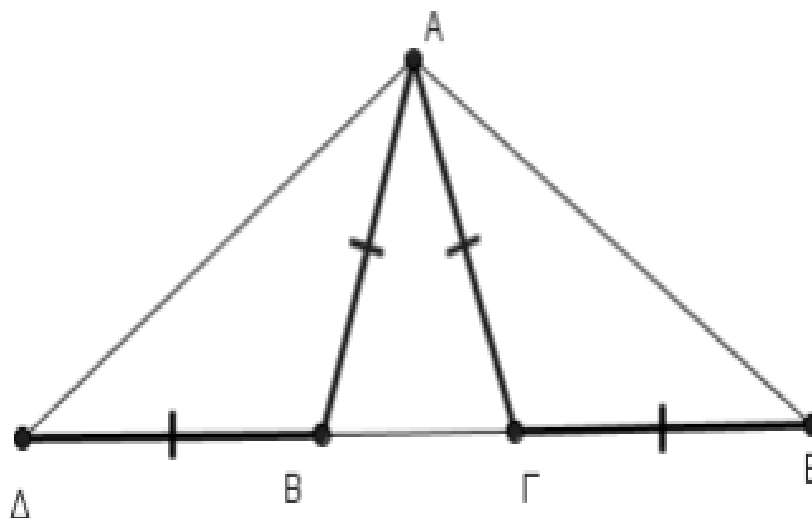
(Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ABD και AGE είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο DAE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)





α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές διότι $AB = A\Gamma$. Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, βρίσκουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ$$

Οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}\hat{D}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E}$ είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, οπότε

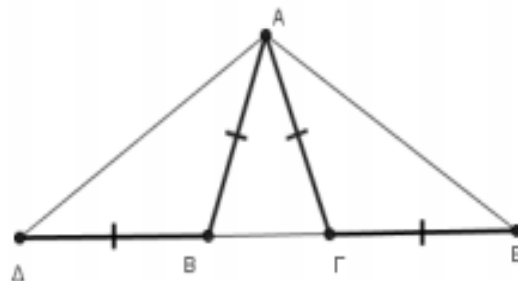
$$\hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $\Delta B = \Gamma E$, από υπόθεση
- $BA = A\Gamma$, από υπόθεση
- $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E} = 110^\circ$

Από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ συμπεραίνουμε ότι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}\hat{B}\hat{D}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E}$ είναι ίσες, δηλαδή $A\Delta = AE$. Άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.





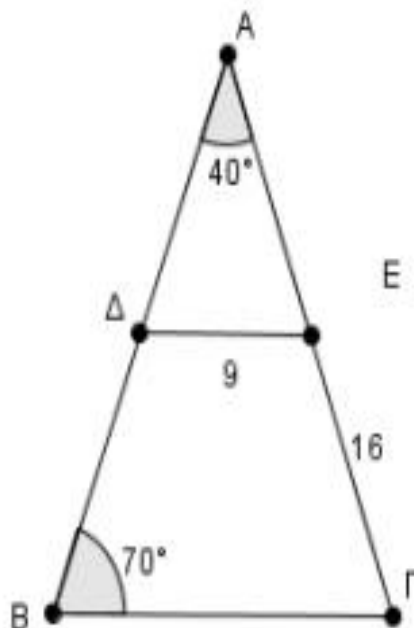
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)





α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ βρίσκουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 70^\circ$$

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε έχει ίσες πλευρές τις AB και ΑΓ.

β) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, ισχύει ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι ίσο με το μισό της ΒΓ, δηλαδή

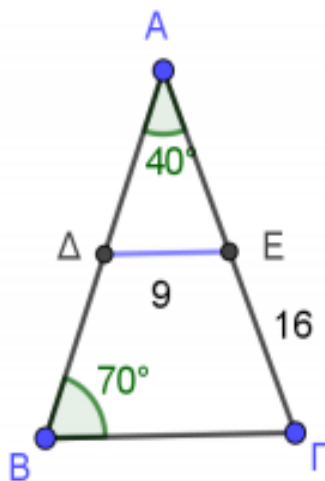
$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$$

γ) Είναι

$$E\Gamma = 16 \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = 16 \Leftrightarrow A\Gamma = 32 \text{ οπότε και } AB = 32.$$

Τότε η περίμετρος του τριγώνου ABΓ είναι:

$$\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 32 + 18 + 32 = 82$$





ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

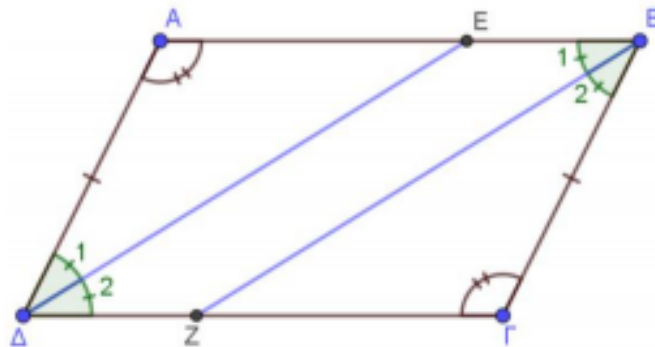


α) Οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$ είναι ίσες ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.

Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ έχουν:

- $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_2$, ως μισά των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$.
- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Από την προηγούμενη ισότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΒΓΖ προκύπτει ότι:

- οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες, δηλαδή $\text{ΔΕ} = \text{ΒΖ}$ (1) καθώς και
- οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{B}_2$ είναι ίσες, δηλαδή $\text{ΑΕ} = \text{ΓΖ}$.

Επειδή $\text{ΑΒ} = \text{ΓΔ}$ και $\text{ΑΕ} = \text{ΓΖ}$, βρίσκουμε

$$\text{ΑΒ} - \text{ΑΕ} = \text{ΓΔ} - \text{ΓΖ} \Leftrightarrow \text{ΒΕ} = \text{ΔΖ} \quad (2)$$

Αφού (σύμφωνα με τις 1 και 2) το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, είναι παραλληλόγραμμο.



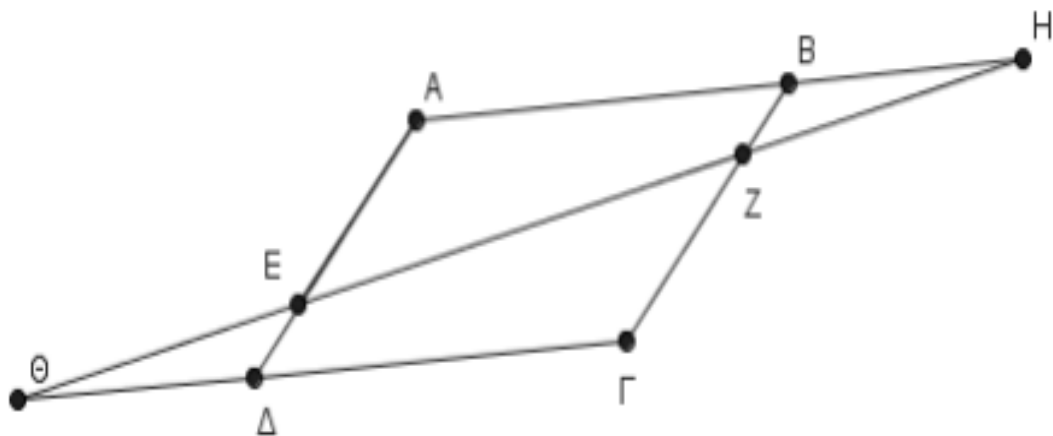
ΘΕΜΑ 2

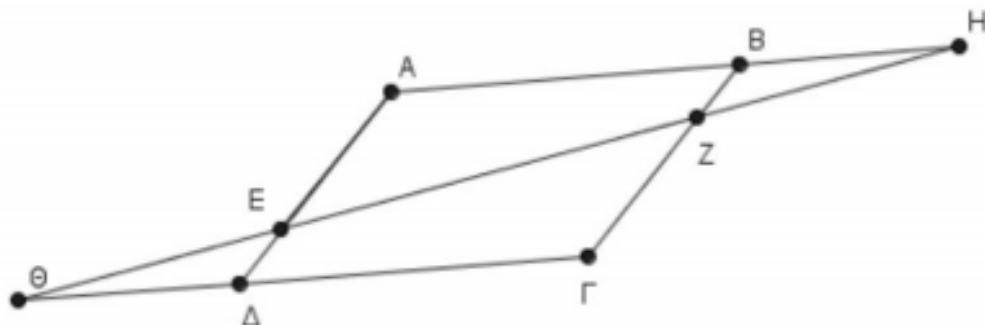
Στις πλευρές AD και BG παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE = ΓZ$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $ΓΔ$ στα σημεία H και $Θ$, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{HBZ} = \widehat{EΔΘ}$ (Μονάδες 8)

β) $\widehat{BZH} = \widehat{ΔΕΘ}$ (Μονάδες 8)

γ) $BH = ΘΔ$ (Μονάδες 9)





α) Είναι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Delta\Gamma}$ διότι είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ABΓΔ. Τότε $\widehat{HBZ} = 180^\circ - \widehat{AB\Gamma} = 180^\circ - \widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{E\Delta\Theta}$.

β) Είναι $\widehat{GZE} = \widehat{AEZ}$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AD, BG που τέμνονται από την EZ. Επίσης $\widehat{BZH} = \widehat{GZE}$ (2) ως κατακορυφήν και $\widehat{E\Delta\Theta} = \widehat{AEZ}$ (3) ως κατακορυφήν. Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\widehat{BZH} = \widehat{E\Delta\Theta}$.

γ) $AD = BG$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και $AE = GZ$ από την υπόθεση. Επομένως:

$$\Delta E = AD - AE = BG - GZ = BZ.$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΘ και ΒΖΗ:

$$\Delta E = BZ \text{ (αποδείχθηκε παραπάνω)}$$

$$\widehat{HBZ} = \widehat{E\Delta\Theta}, \text{ από το (α)}$$

$$\widehat{BZH} = \widehat{E\Delta\Theta}, \text{ από το (β)}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε είναι και $BH = \Theta\Delta$ (γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{BZH} = \widehat{E\Delta\Theta}$, των τριγώνων).



ΘΕΜΑ 2

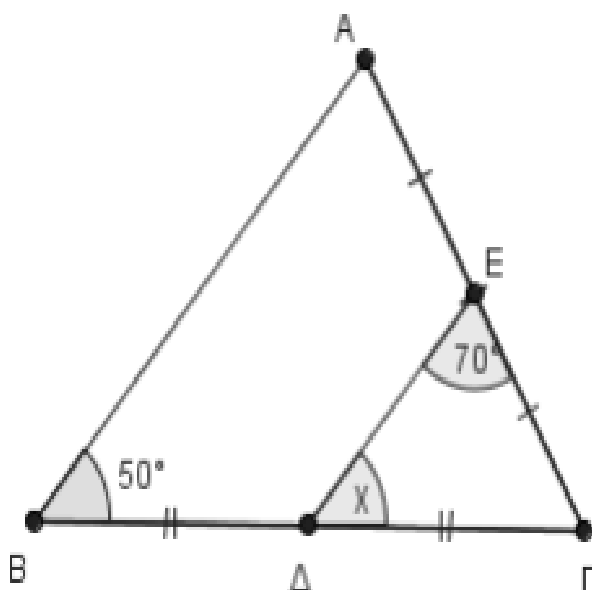
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\widehat{DE\Gamma} = 70^\circ$.

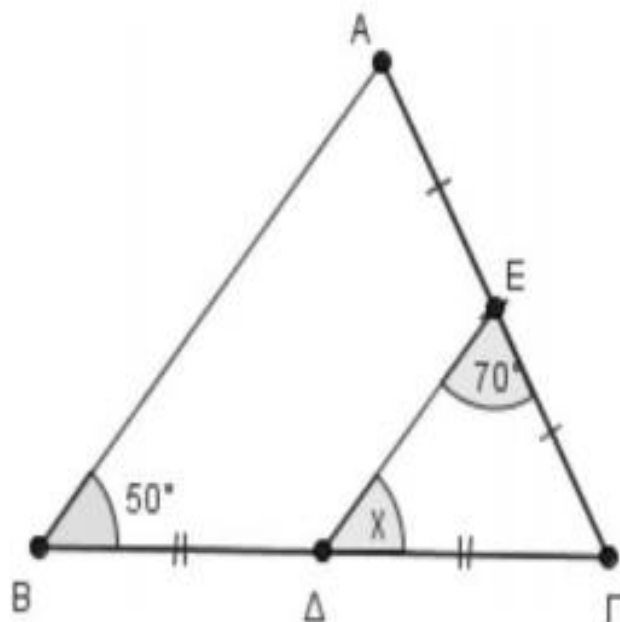
α) Να δικαιολογήσετε γιατί $DE \parallel AB$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε

I. τη γωνία $\hat{x}$. (Μονάδες 8)

II. τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)





α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $ΔΕ \parallel ΑΒ$.

β) i. Είναι $\hat{\chi} = \hat{B} = 50^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΓ.

ii. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ έχουμε ότι $70^\circ + \hat{\chi} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ και χρησιμοποιώντας όσα έχουμε βρει στο βi), γράφουμε:

$$70^\circ + 50^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

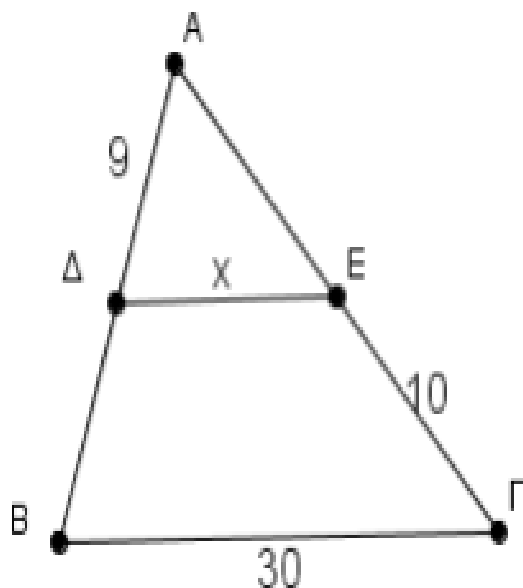
Επίσης $\hat{A} = \hat{E} = 70^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΓ.

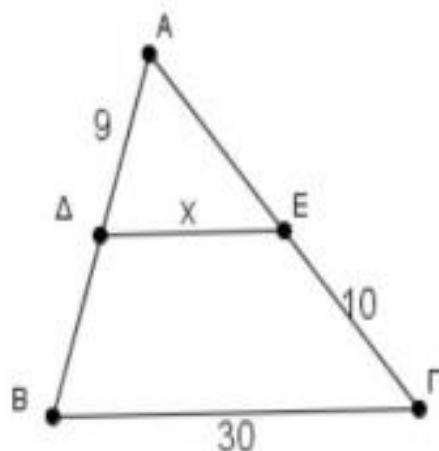


ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta=9$, $E\Gamma=10$ και $B\Gamma=30$.

- α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔE . (Μονάδες 8)





α) Το Δ είναι μέσο του AB, άρα $AB = 2AD$.

Ομοίως, $AG = 2AE$. Η περίμετρος του τριγώνου είναι:

$$\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 2AD + 30 + 2EG = 18 + 30 + 20 = 68.$$

β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών AB, AΓ του τριγώνου ABΓ, οπότε:

$$\Delta E \parallel B\Gamma$$

Επίσης οι BΔ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες, καθώς είναι μέρη πλευρών του τριγώνου ABΓ. Άρα το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

γ) Εφόσον, το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών AB, AΓ του τριγώνου ABΓ, ισχύει επιπλέον ότι:

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow x = \frac{30}{2} \Leftrightarrow x = 15.$$



ΘΕΜΑ 2

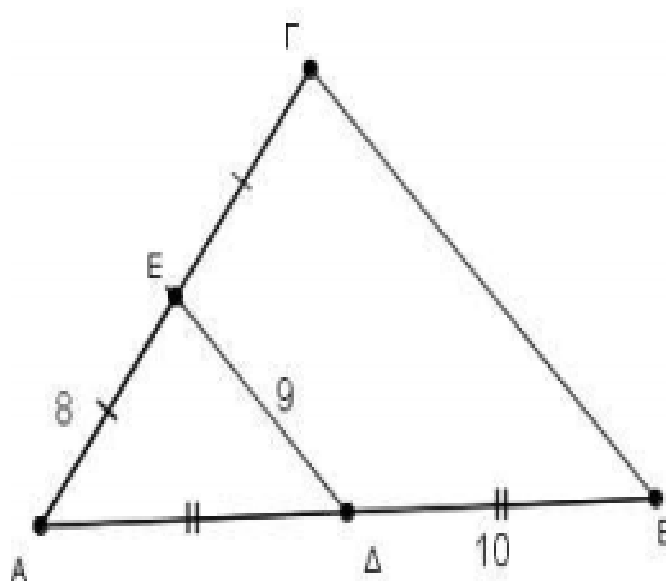
Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE=8$, $E\Delta=9$ και $\Delta B=10$.

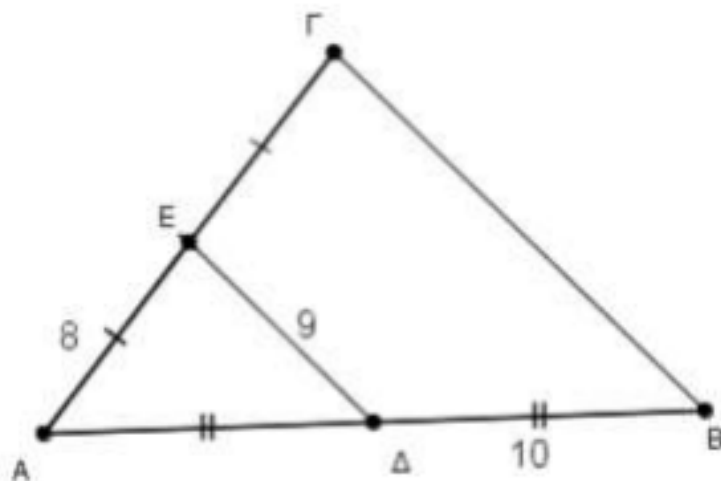
α) Να αποδείξετε οι $B\Gamma$ και ΔE είναι παράλληλες. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$.

(Μονάδες 9)





α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε:

$$\Delta E \parallel B\Gamma$$

β) Επίσης, ισχύει $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$, γιατί το ΔΕ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Άρα:

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$$

γ) Έστω Π_1 η περίμετρος του ΑΒΓ και Π_2 η περίμετρος του ΔΕΓΒ.

Ισχύουν $AB = 2\Delta B$ και $AG = 2AE$. Για τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$\Pi_1 = AB + B\Gamma + AG = 2\Delta B + 18 + 2AE = 20 + 18 + 16 = 54$$

Για τη περίμετρο του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ έχουμε:

$$\Pi_2 = \Delta E + EG + GB + B\Delta = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$$

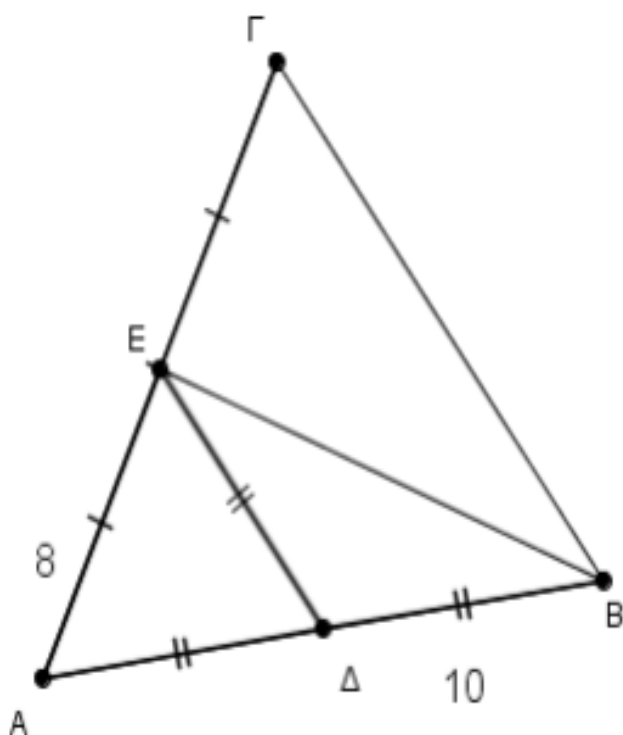
Άρα $\Pi_1 > \Pi_2$.

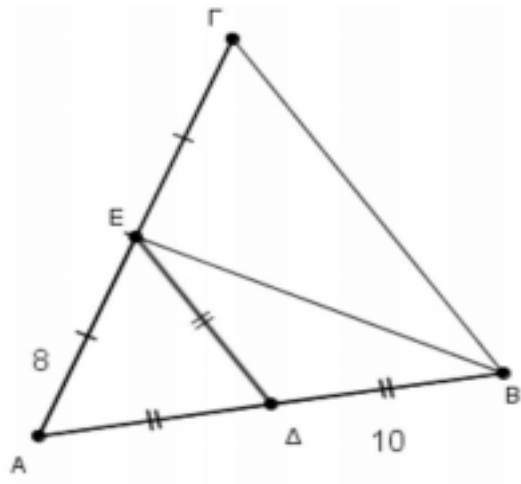


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $AD=ED=\Delta B$ με $AE=8$ και $\Delta B=10$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)





α) Το Δ είναι μέσο του AB, άρα $\Delta B = \frac{AB}{2}$. Επομένως ισχύει ότι $A\Delta = E\Delta = \Delta B = \frac{AB}{2}$.

Άρα, στο τρίγωνο AEB μια διάμεσός του, η EΔ, ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, δηλαδή την AB. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά AB.

β) Ισχύει ότι $A\Delta = E\Delta = \Delta B = 10$.

Εφόσον το Δ είναι μέσο του AB, ισχύει $AB = 2\Delta B = 20$.

Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, οπότε $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 20$$

Επομένως, $AB = B\Gamma$ και άρα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

γ) Η περίμετρος του τριγώνου ABΓ είναι:

$$\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 20 + 2AE = 40 + 16 = 56$$



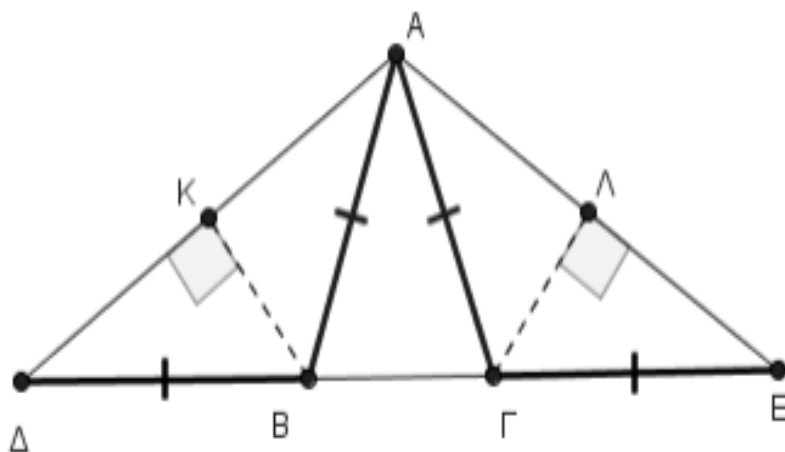
ΘΕΜΑ 2

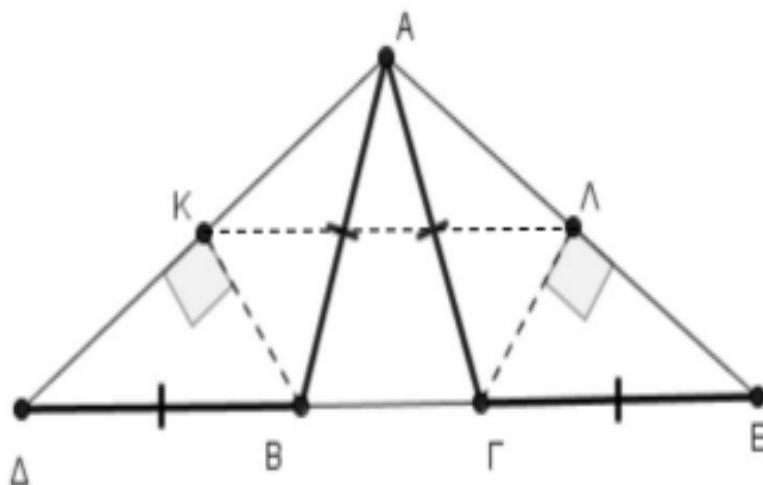
Θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνο $AB\Delta$ με $AB = A\Delta = 5$ και $A\Gamma E$ με $A\Gamma = \Gamma E = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ, B, Γ και E να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους BK και $\Gamma\Lambda$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$. (Μονάδες 9)





α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή, γιατί είναι $AB = B\Delta$ και $A\Gamma = \Gamma E$, αντίστοιχα.

β) Το BK είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Delta$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου, οπότε το K είναι μέσο του $A\Delta$.

Όμοια, το $\Gamma\Lambda$ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $A\Gamma E$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσός του, συνεπώς το Λ είναι μέσο του $A\Gamma$.

γ) Είναι $AB + A\Gamma + B\Gamma = 12$. Όμως ισχύει $AB = B\Delta = A\Gamma = \Gamma E$, άρα $B\Delta + \Gamma E + B\Gamma = 12$.

Το τμήμα $K\Lambda$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $A\Delta E$, άρα

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{B\Delta + \Gamma E + B\Gamma}{2} = \frac{12}{2} = 6$$



ΘΕΜΑ 2

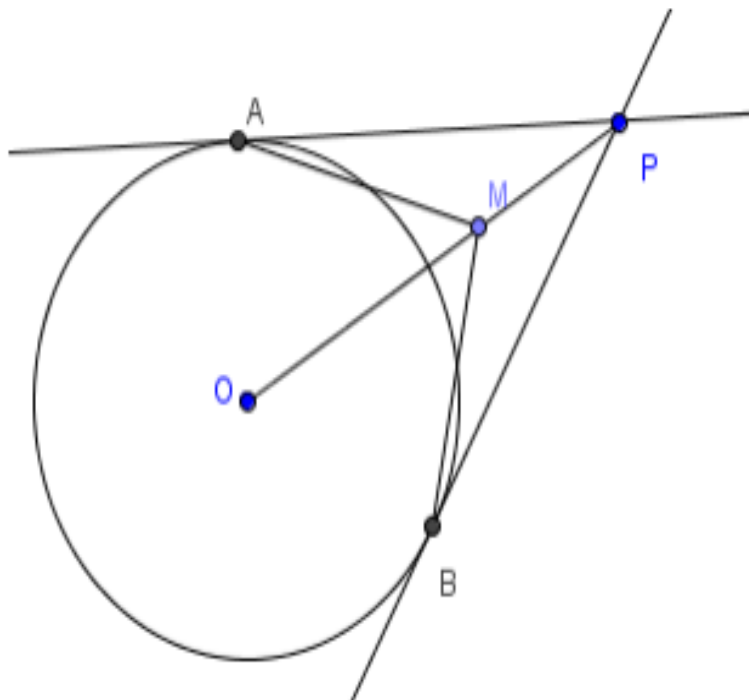
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

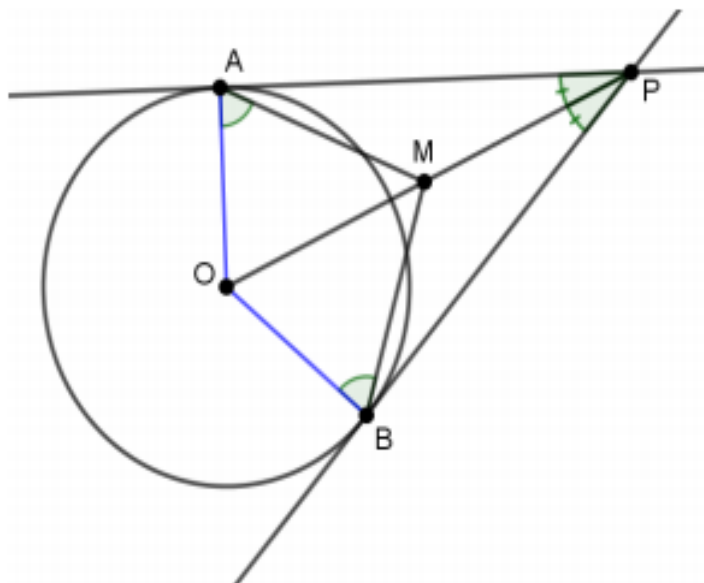
α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 13)





α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα PAM και PMB. Έχουν:

- PM κοινή πλευρά
- $PA = PB$ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το P προς τον κύκλο
- $\widehat{OPA} = \widehat{OPB}$, διότι η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

β) Από την ισότητα των τριγώνων PAM και PMB προκύπτει ότι $\widehat{PAM} = \widehat{PBM}$, καθώς οι γωνίες βρίσκονται απέναντι από την PM και στα δύο τρίγωνα.

Επίσης $\widehat{OPA} = \widehat{OPB} = 90^\circ$ διότι οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες ευθείες. Άρα $\widehat{MAO} = \widehat{OPA} - \widehat{PAM} = \widehat{OPB} - \widehat{PBM} = \widehat{MBO}$.



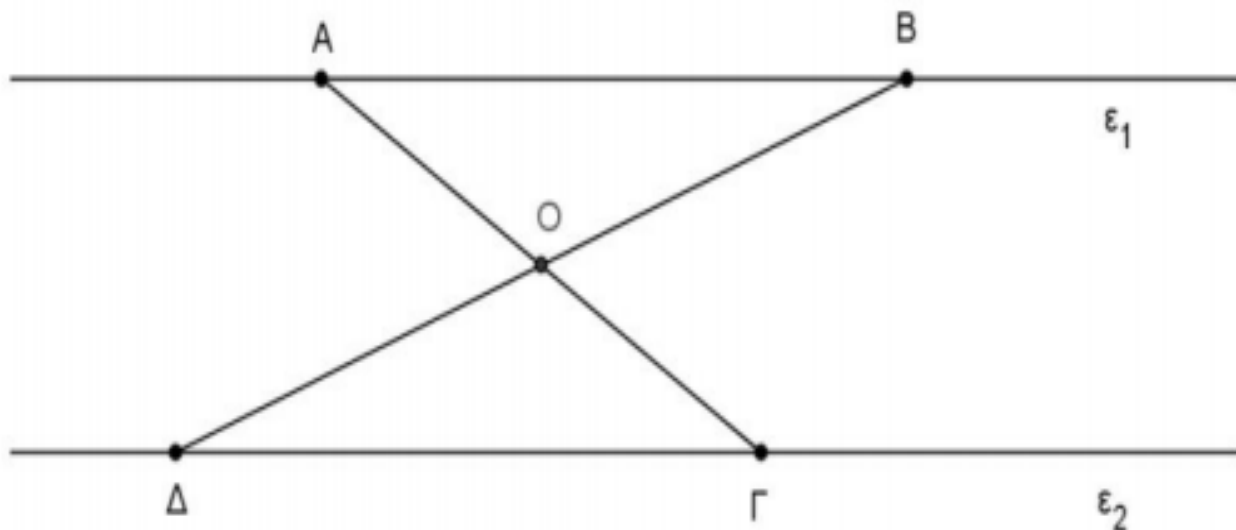
ΘΕΜΑ 2

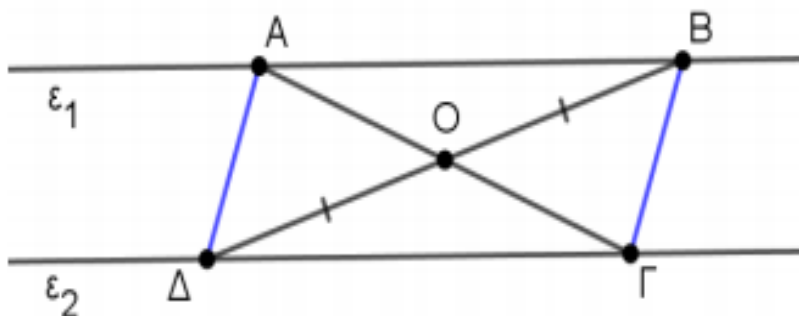
Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και τα σημεία A, B στην ϵ_1 και Δ και Γ στην ϵ_2 ώστε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται στο μέσο O του $B\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AOB και $ΓΟΔ$ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)





α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOB και $ΓΟΔ$, τα οποία έχουν:

- $BO = OD$, αφού O μέσον του BD
- $\widehat{AOB} = \widehat{ΓΟΔ}$, ως κατακορυφήν
- $\widehat{ABO} = \widehat{ΓΔO}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τέμνονται από την BD .

Με βάση το κριτήριο $\Gamma - \Pi - \Gamma$ τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν:

- $OA = OG$, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{ABO}$ και $\widehat{ΓΔO}$
- $AB = \Gamma\Delta$, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{ΓΟΔ}$
- και $\widehat{OAB} = \widehat{OΓΔ}$.

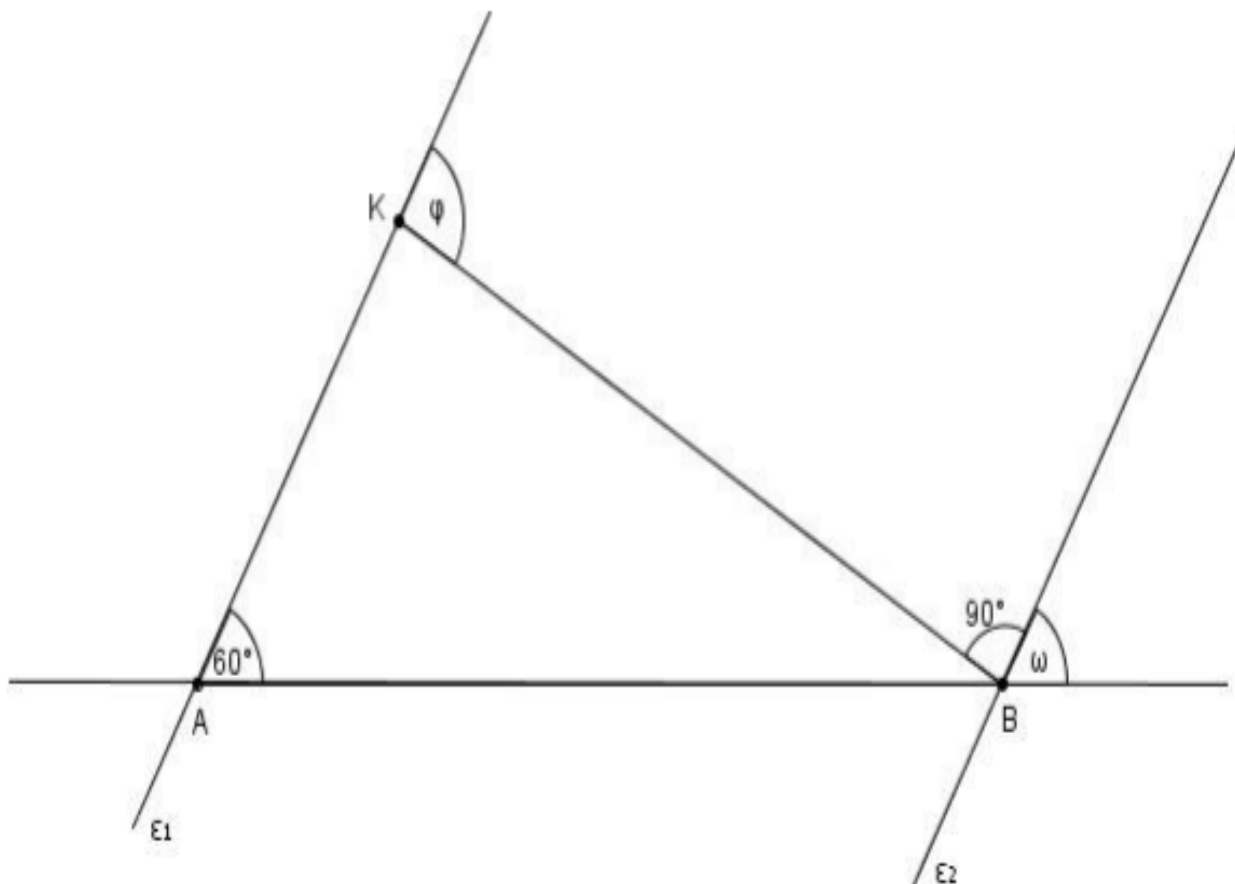
β) Ισχύει ότι $OA = OG$ και $OB = OD$, δηλαδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται και άρα είναι παραλληλόγραμμο.

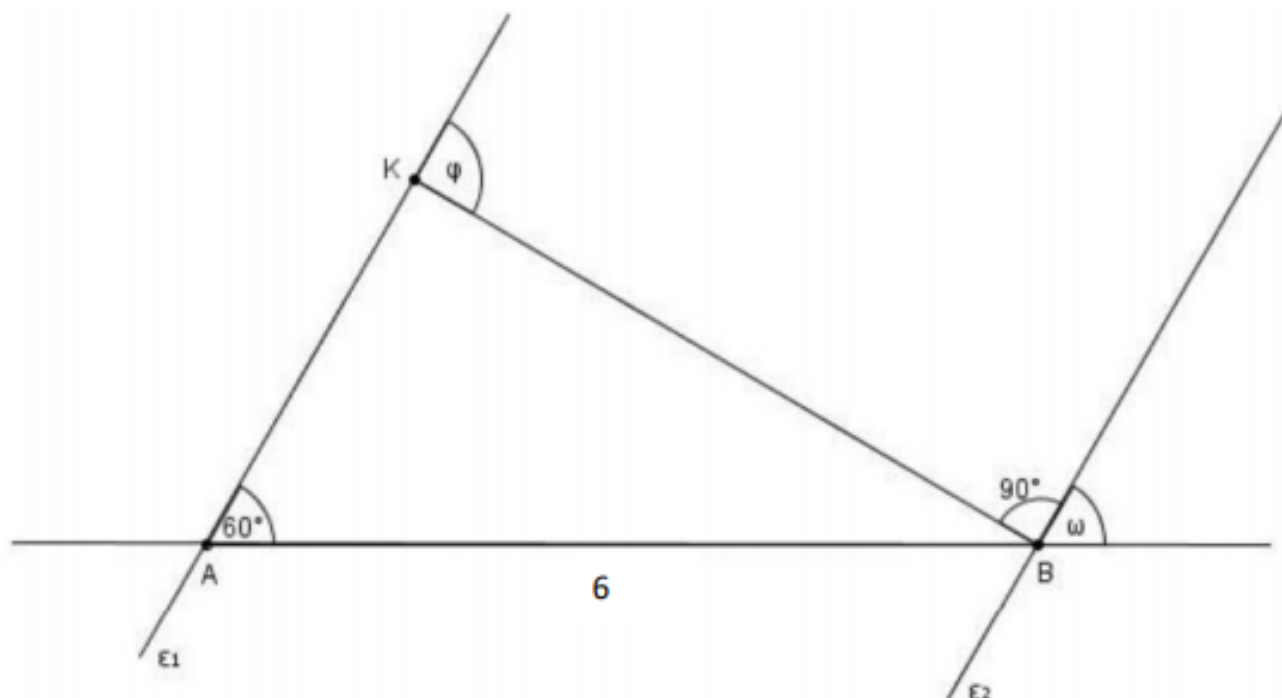


ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και $AB=6$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ϕ και ω . (Μονάδες 10)
- β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 7)
- γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)





α) Είναι $\widehat{\omega} = \widehat{BAK} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ϵ_1, ϵ_2 που τέμνονται από την AB . Επειδή $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ και $BK \perp \epsilon_2$, θα είναι και $BK \perp \epsilon_1$. Άρα $\widehat{\varphi} = 90^\circ$.

β) Επειδή $\widehat{\varphi} = 90^\circ$ και η $\widehat{AKB}$ είναι παραπληρωματική της, θα είναι $\widehat{AKB} = 90^\circ$. Άρα το τρίγωνο ABK είναι ορθογώνιο.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ABK βρίσκουμε:

$$\widehat{BAK} + \widehat{ABK} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \widehat{ABK} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABK} = 30^\circ$$

Τότε, η απέναντι της $\widehat{ABK}$, κάθετη πλευρά του τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή:

$$AK = \frac{AB}{2} = 3$$



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB .

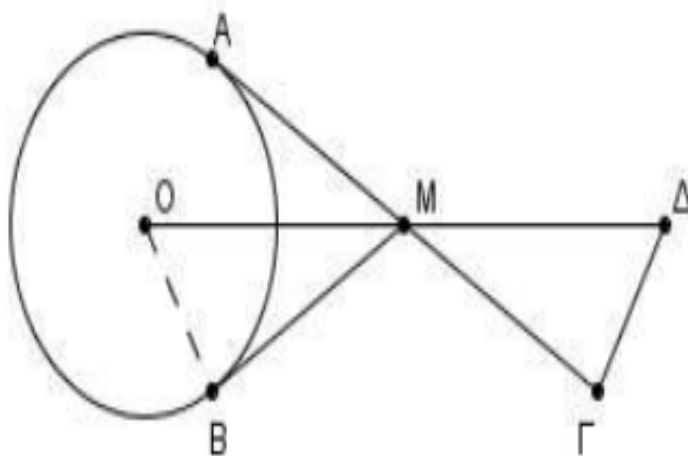
Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $ΜΓ=MA$ και την OM κατά τμήμα $ΜΔ=OM$.

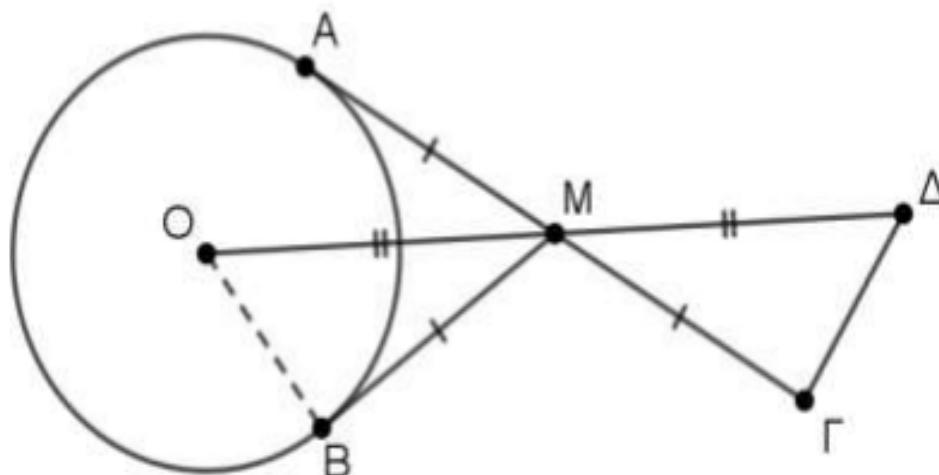
α) Να αποδείξετε ότι $MB = ΜΓ$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $ΜΓΔ$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)





α) Ισχύει ότι $MA = MB$ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου (το σημείο M). Επίσης, από υπόθεση ισχύει ότι $M\Gamma = MA$ οπότε προκύπτει $MB = M\Gamma$ (1).

β) Ακόμα ισχύει ότι και $\widehat{A\hat{M}O} = \widehat{B\hat{M}O}$ (2) γιατί η διακεντρική ευθεία OM διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων, η οποία είναι η $\widehat{AMB}$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$, τα οποία έχουν:

- $M\Delta = OM$, από την υπόθεση
- $MB = M\Gamma$, λόγω της (1)
- $\widehat{B\hat{M}O} = \widehat{\Gamma\hat{M}\Delta}$, διότι $\widehat{A\hat{M}O} = \widehat{\Gamma\hat{M}\Delta}$ (ως κατακορυφήν) και $\widehat{A\hat{M}O} = \widehat{B\hat{M}O}$ (λόγω της (2)).

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.



ΘΕΜΑ 2

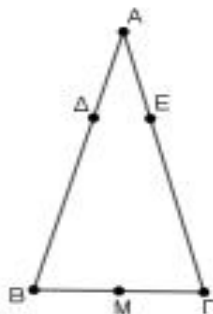
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και στις ίσες πλευρές AB, AG παίρνουμε αντίστοιχα

τμήματα $AD=\frac{1}{3}AB$ και $AE=\frac{1}{3}AG$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα BD και GE είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα BDM και $ME\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

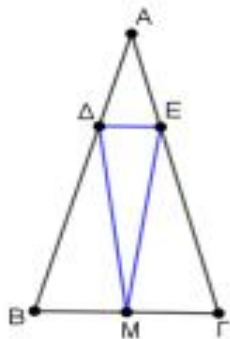
γ) το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



α) Επειδή $AB = ΑΓ$ και $ΑΔ = ΑΕ$, έχουμε ότι:

$$ΒΔ = AB - ΑΔ = ΑΓ - ΑΕ = ΓΕ$$

β) Φέρνουμε αρχικά τα $ΔΜ$ και $ΕΜ$.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΜΕΓ$, τα οποία έχουν:

- $ΒΔ = ΓΕ$, από το α)
- $ΒΜ = ΜΓ$, γιατί το $Μ$ είναι μέσο της $ΒΓ$ και
- $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΜΕΓ$ είναι ίσα.

γ) Τα τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΜΕΓ$ είναι ίσα, από το β) και άρα ισχύει $ΜΕ = ΜΔ$ (καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$). Συνεπώς, το τρίγωνο $ΜΔΕ$ είναι ισοσκελές.

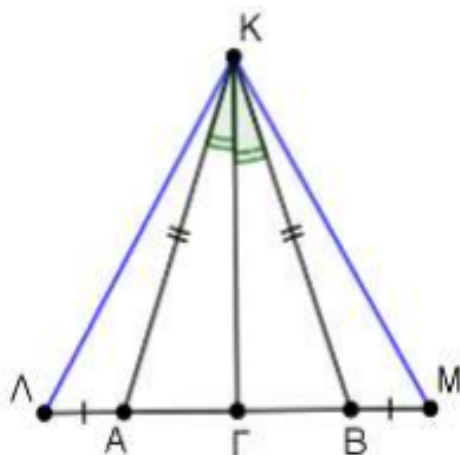


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA=KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $A\Lambda=BM$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$ (Μονάδες 13)



Είναι $\widehat{B\hat{A}K} = \widehat{A\hat{B}K}$ ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου KAB .

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα KAL και KBM , το οποία έχουν:

- $KA = KB$, από την υπόθεση
- $\widehat{K\hat{A}L} = \widehat{K\hat{B}M}$, γιατί $\widehat{K\hat{A}L} = 180^\circ - \widehat{B\hat{A}K} = 180^\circ - \widehat{A\hat{B}K} = \widehat{K\hat{B}M}$
- $AL = BM$, από υπόθεση.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα KAL και KBM είναι ίσα. Οπότε ισχύει $KL = KM$ (είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{K\hat{A}L}$ και $\widehat{K\hat{B}M}$). Άρα το τρίγωνο KLM είναι ισοσκελές.

β) Η $K\Gamma$ είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου KAB που αντιστοιχεί στη γωνία της κορυφής, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου KAB . Επομένως $A\Gamma = B\Gamma$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $AL = BM$.

Άρα, $\Gamma\Lambda = AL + A\Gamma = BM + B\Gamma = \Gamma M$.

Συνεπώς, το Γ είναι μέσο της LM και επομένως η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του KLM .

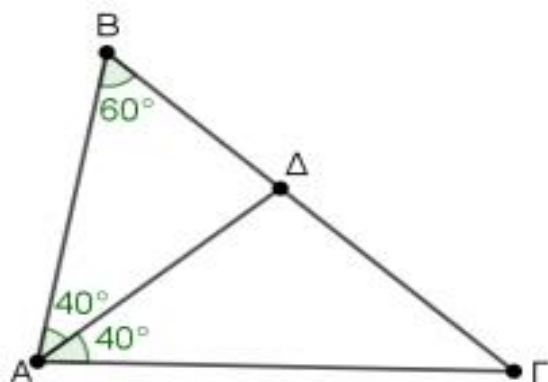


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Φέρουμε από το D ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A\hat{D}E}$, $\hat{E\hat{D}\Gamma}$. (Μονάδες 13)



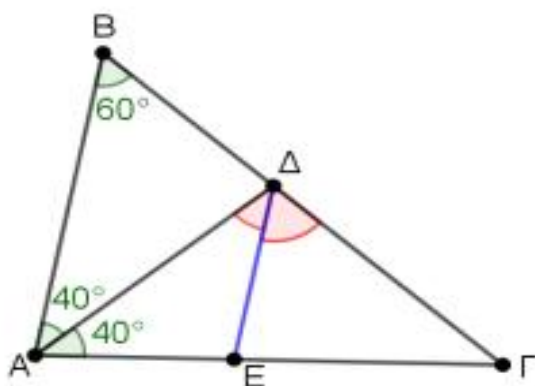
α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 80^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 40^\circ$$

Άρα $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

β) Η AD διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, άρα ισχύει ότι $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{A}\Delta = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$.

Φέρνουμε την $\Delta E \parallel AB$.



Είναι $\hat{E}\hat{\Delta}A = \hat{B}\hat{A}\Delta = 40^\circ$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta E, AB$ που τέμνονται από την AD . Επίσης $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = 60^\circ$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Delta E, AB$ που τέμνονται από την $B\Delta$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

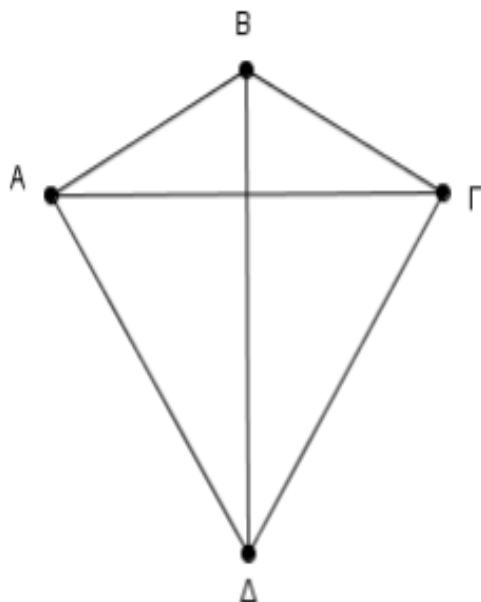
Να αποδείξετε ότι:

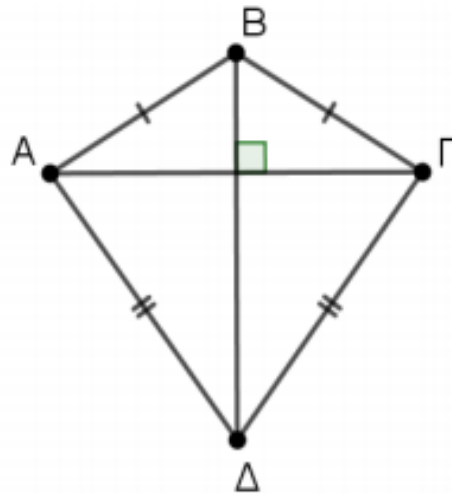
α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 13)





α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ έχουν:

- $BA = B\Gamma$, από την υπόθεση
- $\Delta A = \Delta\Gamma$, από την υπόθεση
- $B\Delta$ κοινή πλευρά.

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε έχουν $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές $A\Delta$ και $\Delta\Gamma$) και $\widehat{A\hat{\Delta}B} = \widehat{B\hat{\Delta}\Gamma}$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές AB και $B\Gamma$). Άρα η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\widehat{A\hat{B}\Delta}$ και $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$.

β) Είναι $BA = B\Gamma$, άρα το σημείο B έχει την ίδια απόσταση από τα A και Γ (δηλαδή τα άκρα του $A\Gamma$). Παρόμοια, $\Delta A = \Delta\Gamma$, άρα το σημείο Δ έχει την ίδια απόσταση από τα A και Γ (δηλαδή τα άκρα του $A\Gamma$). Επομένως προκύπτει ότι τα B και Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $A\Gamma$. Οπότε η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $A\Gamma$, εφόσον δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία.

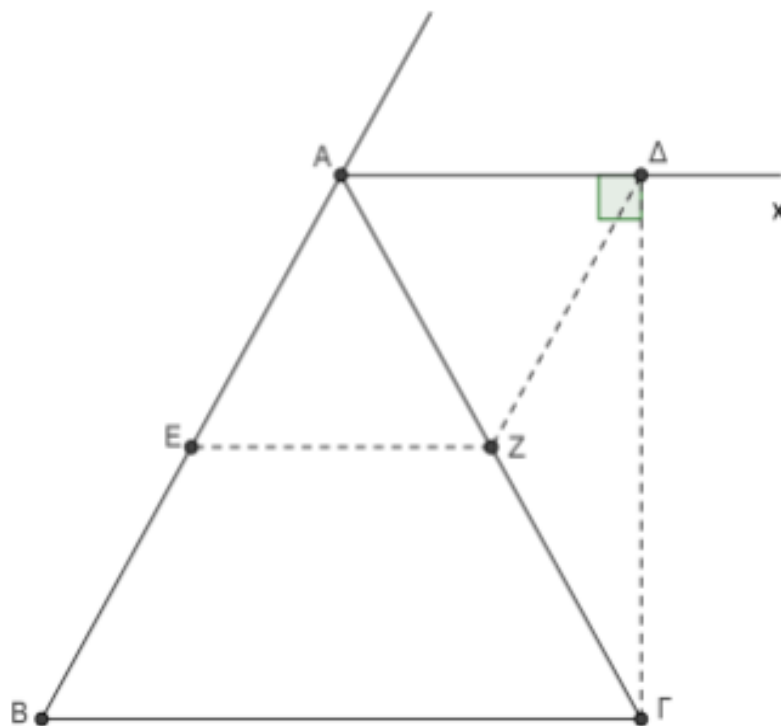


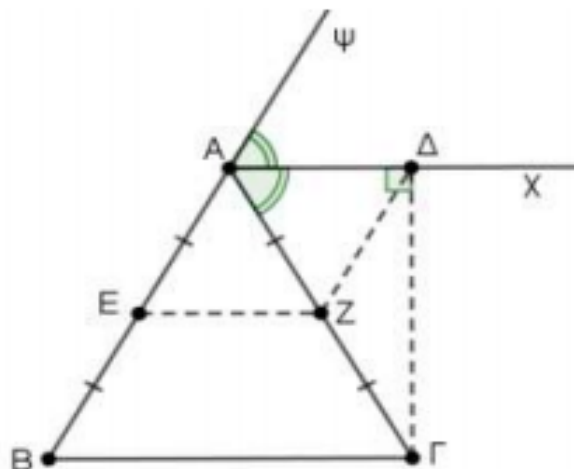
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $EZ = AE = AZ$. (Μονάδες 9)
- β) Η γωνία $\hat{A\Gamma\Delta} = 30^\circ$. (Μονάδες 10)
- γ) Τα τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)





α) Το EZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, άρα $EZ = \frac{B\Gamma}{2}$.

Επίσης, το E είναι μέσο του AB και το Z είναι μέσο του AG, άρα ισχύουν $AZ = \frac{AG}{2}$ και

$$AE = \frac{AB}{2}.$$

Λόγω του ισοπλεύρου ABΓ, ισχύει ότι $B\Gamma = AB = AG$. Άρα $EZ = AE = AZ$.

β) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, άρα για τις γωνίες του ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$

Επίσης ισχύει ότι $\psi\hat{A}\Gamma = 180^\circ - \hat{A} = 120^\circ$.

Η Αχ είναι διχοτόμος της γωνίας και άρα $\Delta\hat{A}Z = \frac{\psi\hat{A}\Gamma}{2} = 60^\circ$.

Επίσης, η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ του ορθογώνιου τριγώνου $A\Delta\Gamma$ είναι:

$$A\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - \Delta\hat{A}Z - 90^\circ = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

γ) Στο ίδιο ορθογώνιο τρίγωνο, η DZ είναι διάμεσος της υποτείνουσας AG και $A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$. Άρα $\Delta Z = AZ = A\Delta$.

Επιπλέον, από το α) έχουμε ότι $EZ = AE = AZ$, άρα για το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ ισχύει ότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες, καθώς $A\Delta = \Delta Z = EZ = AE$, επομένως είναι ρόμβος.

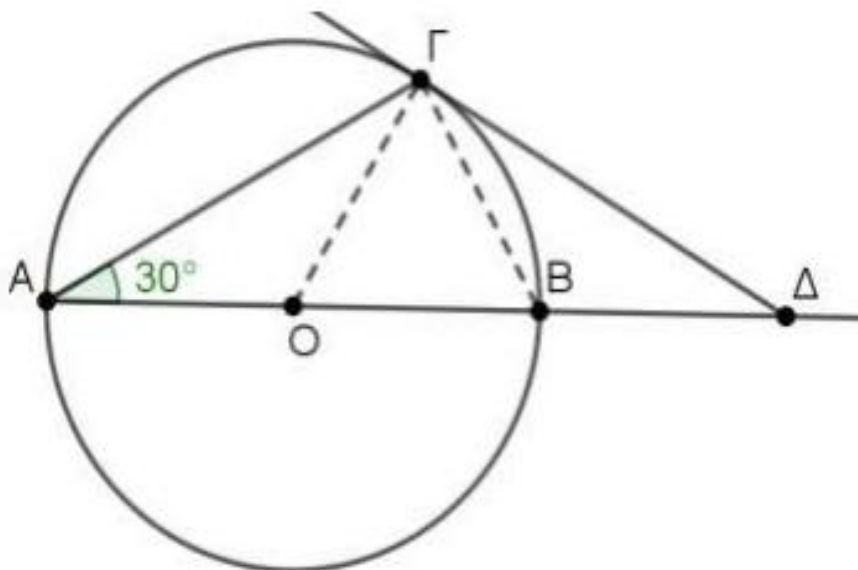


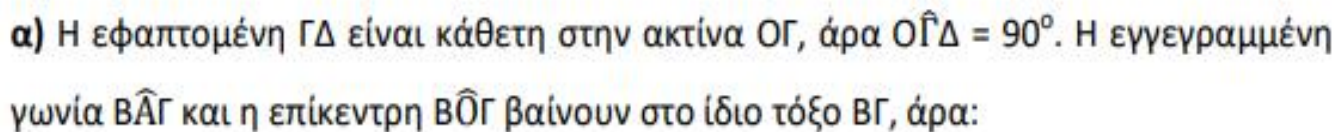
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , και χορδή AG τέτοια ώστε $\widehat{BAG} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΟΓΔ$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BΓΔ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)





$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2} \Leftrightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{B\hat{O}\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \widehat{B\hat{O}\Gamma} = 60^\circ$$

$$\widehat{O\Gamma\Delta} + \widehat{\Gamma\tilde{O}\Delta} + \widehat{O\tilde{\Delta}\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \widehat{O\tilde{\Delta}\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{O\tilde{\Delta}\Gamma} = 30^\circ$$

β) Η γωνία $B\hat{\Gamma}D$ είναι γωνία μεταξύ χορδής $B\Gamma$ και εφαπτομένης ΓD του κύκλου, άρα είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής $B\Gamma$ του κύκλου, δηλαδή με την $\hat{A} = 30^\circ$. Άρα $B\hat{\Gamma}D = 30^\circ$.

Επίσης, από το α) $\widehat{OD\Gamma} = 30^\circ$, δηλαδή $\widehat{BD\Gamma} = 30^\circ$. Άρα το τρίγωνο $B\Gamma D$ έχει δύο ίσες γωνίες, επομένως είναι ισοσκελές.



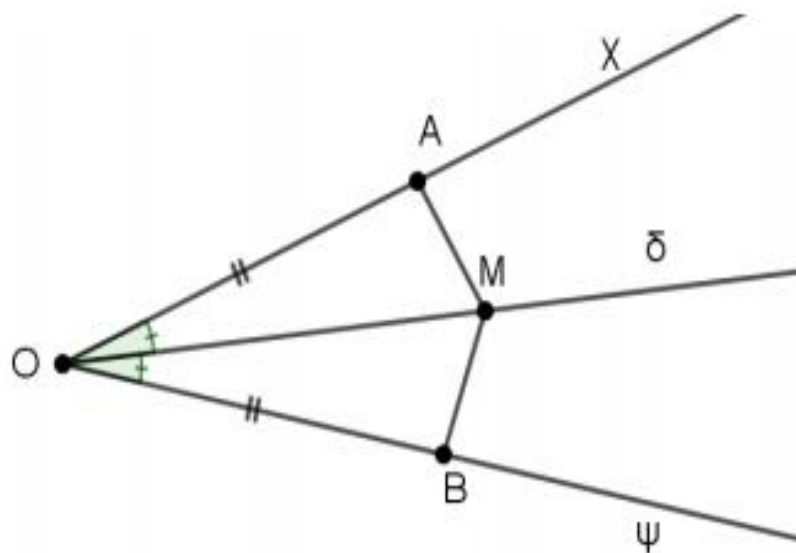
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $\widehat{\chi\hat{\omicron}\gamma}$ και η διχοτόμος της Οδ . Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οχ και Ογ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\text{ΟΑ}=\text{ΟΒ}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΜΑ}=\text{ΜΒ}$. (Μονάδες 15)

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\text{ΑΜΒ}}$. (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα BMO και AMO, τα οποία έχουν:

- OM κοινή πλευρά
- $OA = OB$ και
- $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ γιατί η Oδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\chi\widehat{\psi}$.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα BMO και AMO είναι ίσα οπότε, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{AOM}$ και $\widehat{BOM}$ βρίσκονται οι ίσες πλευρές $MA = MB$.

β) Επειδή τα τρίγωνα BMO και AMO είναι ίσα, έχουν και $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές OA και OB), άρα η Oδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$.



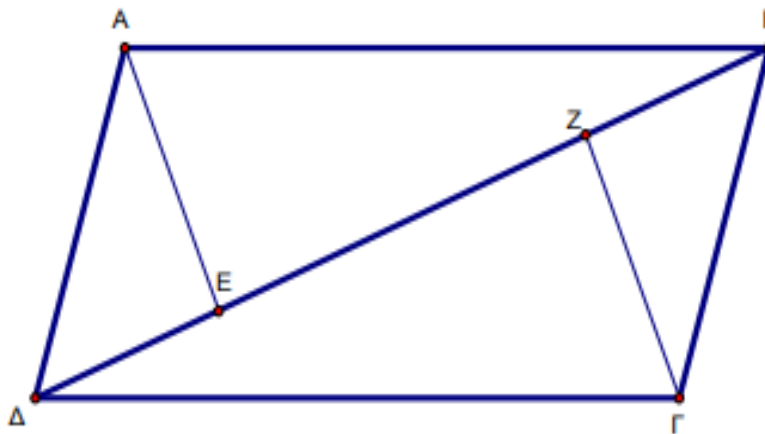
ΘΕΜΑ 2

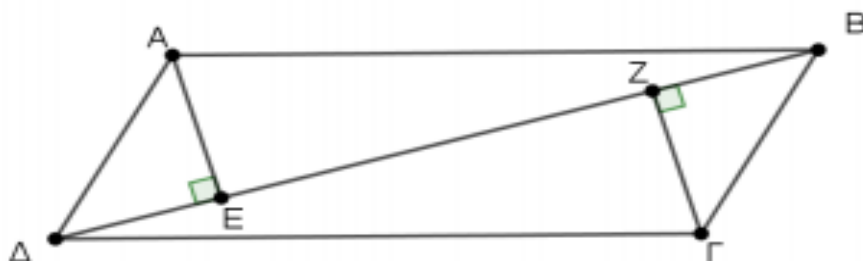
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AE = \Gamma Z$. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)





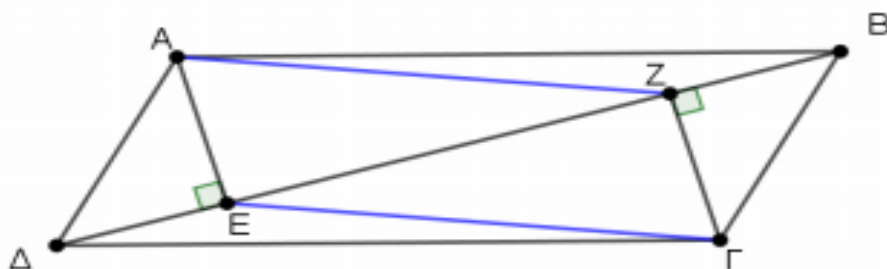
α) Συγκρίνουμε τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle GBZ$:

- Είναι ορθογώνια
- $AD = BG$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- $\widehat{ADE} = \widehat{GBZ}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AD, BG που τέμνονται από την $B\Delta$.

Άρα πρόκειται για ορθογώνια τρίγωνα με δύο οξείες γωνίες ίσες μία προς μία και τις υποτείνουσές τους ίσες, επομένως είναι ίσα.

Από την ισότητα των τριγώνων $\triangle ADE$ και $\triangle GBZ$ προκύπτει ότι $AE = GZ$ (γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{ADE}$ και $\widehat{GBZ}$).

β) Φέρνουμε τις EG και AZ .



Οι AE και GZ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ($AE \perp B\Delta$ και $GZ \perp AB$), άρα $AE \parallel GZ$.

Επίσης, στο α) έχουμε βρει ότι $AE = GZ$.

Άρα το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις AE και GZ , παράλληλες και ίσες.

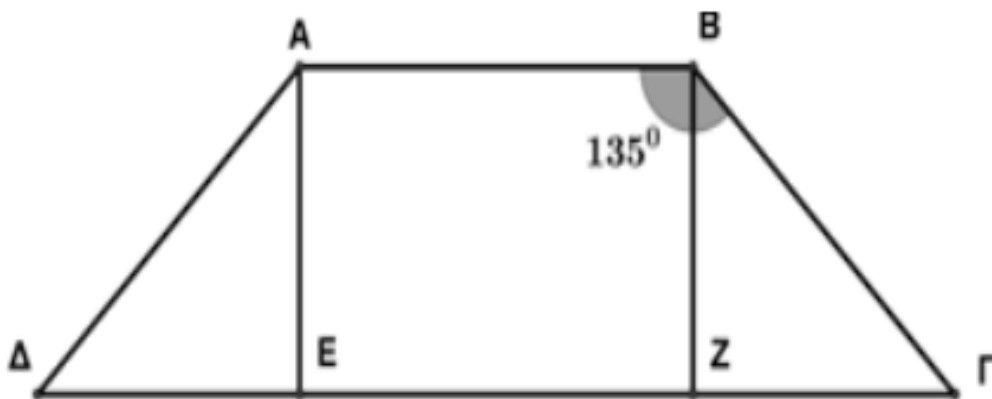


ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $AE = ED = BZ = \Gamma Z$ (Μονάδες 15)





α) Το τραπέζιο είναι ισοσκελές, άρα οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες.

Επομένως $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{A\hat{B}\Gamma} = 135^\circ$.

Οι $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ και $\widehat{B\hat{\Gamma}\Delta}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$\widehat{A\hat{B}\Gamma} + \widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = 45^\circ$$

Επιπλέον, $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Gamma}\Delta}$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση $\Gamma\Delta$ του ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. Άρα $\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 45^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$ οπότε από το άθροισμα των γωνιών του βρίσκουμε:

$$\widehat{Z\hat{B}\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{Z\hat{B}\Gamma} + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{Z\hat{B}\Gamma} = 45^\circ$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $BZ = Z\Gamma$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Delta$ είναι $\widehat{\Delta} = 45^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του βρίσκουμε:

$$\widehat{\Delta\hat{A}E} + \widehat{\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\hat{A}E} + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\hat{A}E} = 45^\circ$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $AE = E\Delta$ (2).

Επίσης τα ύψη του τραπεζίου είναι ίσα, οπότε $AE = BZ$ (3).

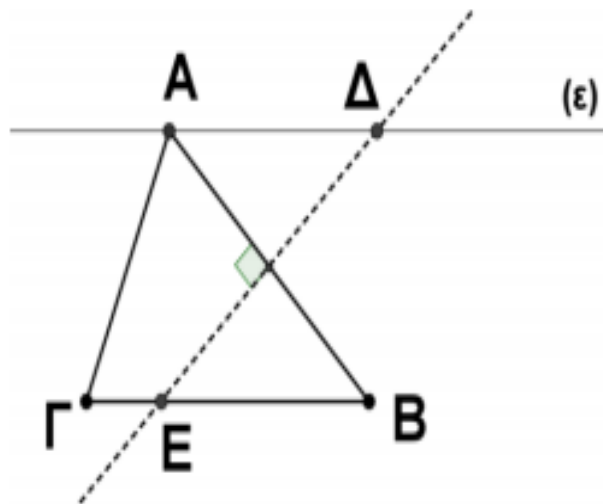
Από (1), (2) και (3) έχουμε $AE = E\Delta = BZ = Z\Gamma$.



ΘΕΜΑ 2

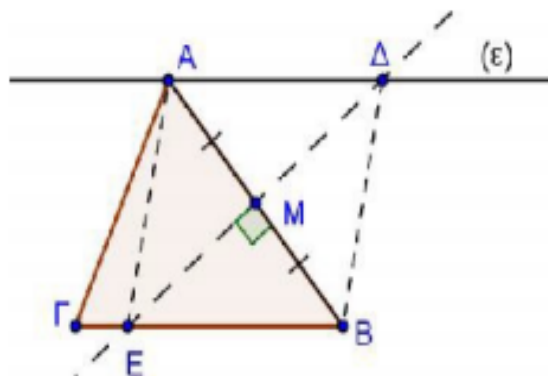
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

- α) Να αποδείξετε ότι $ΔΑ=ΔΒ$ και $ΕΑ=ΕΒ$. (Μονάδες 6)
- β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ. (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)





α) Τα σημεία E, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB άρα ισαπέχουν από τα σημεία A και B, ισχύει δηλαδή $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AMΔ και EMB έχουν:

$AM = MB$, διότι το M είναι μέσο του AB και

$\widehat{M\hat{A}\Delta} = \widehat{M\hat{B}E}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε), BΓ που τέμνονται από την AB.

Άρα τα τρίγωνα AMΔ και EMB είναι ίσα επειδή έχουν τις υποτείνουσες ίσες και μια οξεία γωνία ίση μία προς μία.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων AMΔ και MEB, προκύπτει ότι $MD = ME$ (απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{M\hat{A}\Delta}$, $\widehat{M\hat{B}E}$). Άρα, στο τετράπλευρο AΔBE οι διαγώνιοί του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.



ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)

β) Αν η πλευρά ΒΓ=2cm να βρείτε το μήκος της ΑΒ. (Μονάδες 10)

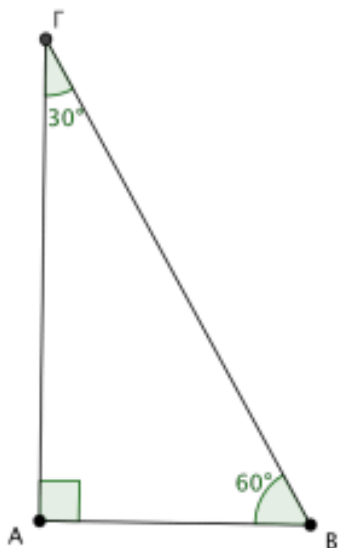


α) Ισχύει ότι: $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Άρα $\hat{A} = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABΓ βρίσκουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ισχύει:

$$AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm.}$$



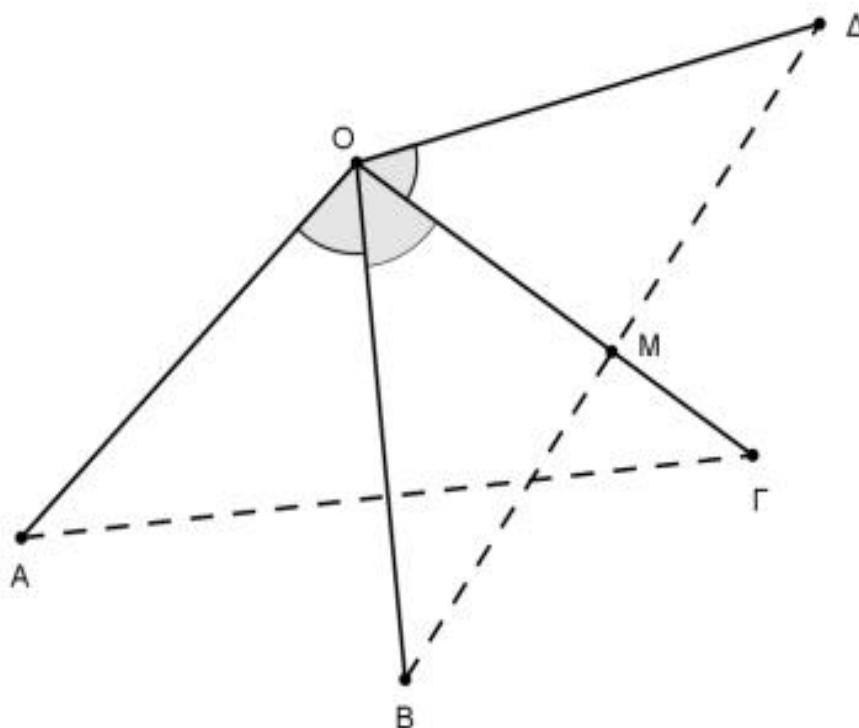
ΘΕΜΑ 2

Αν $\widehat{AOB} = \widehat{BOG} = \widehat{GOD}$ και $OA = OB = OG = OD$, να αποδείξετε ότι:

α) $AG = BD$. (Μονάδες 10)

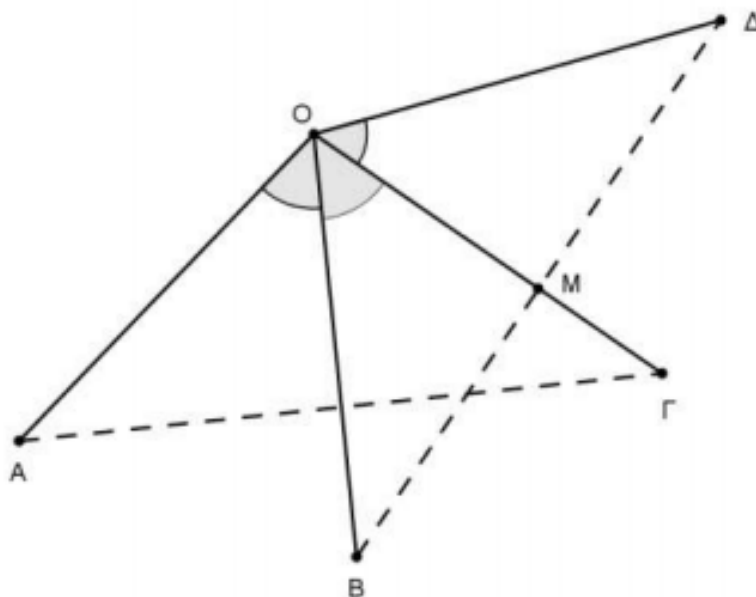
β) Το M είναι μέσον της BD , όπου M το σημείο τομής των τμημάτων OG και BD .

(Μονάδες 15)





1632



α) Έστω ότι $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{GO\Delta} = \widehat{\omega}$.

Τα τρίγωνα $AO\Gamma$ και $BO\Delta$ έχουν:

$OA = OB$, από υπόθεση

$OG = OD$, από υπόθεση

$\widehat{AOG} = \widehat{BOD}$, διότι $\widehat{AOG} = \widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 2\widehat{\omega}$ και $\widehat{BOD} = \widehat{BO\Gamma} + \widehat{GO\Delta} = 2\widehat{\omega}$

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AO\Gamma$ και $BO\Delta$ είναι ίσα οπότε έχουν και

$AG = BD$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $AO\Gamma$, $BO\Delta$.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $BO\Delta$ η OM είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, άρα είναι και διάμεσος του $BO\Delta$. Επομένως το M είναι μέσο του BD .

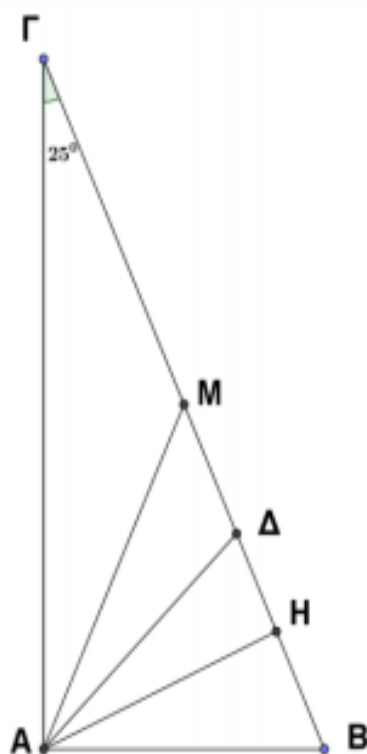


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}MB$, $\hat{H}AB$, $\hat{A}DB$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{M}AD = \hat{D}AH = 20^\circ$. (Μονάδες 10)





α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, βρίσκουμε:

$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} + 25^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 65^\circ.$$

Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε ισχύει: $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG = MB$.

Άρα τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και AMB είναι ισοσκελή, οπότε:

$$\widehat{M\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Gamma} = 25^\circ \text{ και } \widehat{M\hat{A}B} = \widehat{B} = 65^\circ.$$

Η γωνία $\widehat{AMB}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AM\Gamma$, άρα $\widehat{AMB} = \widehat{M\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 50^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου HAB προκύπτει:

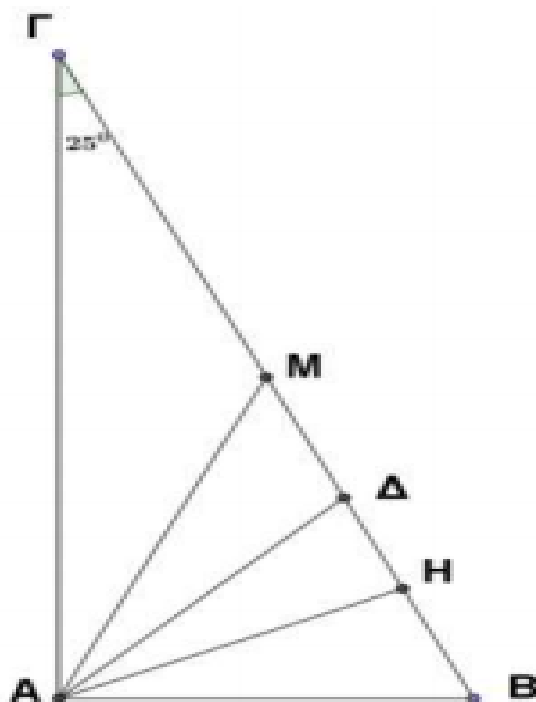
$$\widehat{H\hat{A}B} + \widehat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{H\hat{A}B} + 65^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{H\hat{A}B} = 25^\circ.$$

Η γωνία $\widehat{A\hat{D}B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, άρα

$$\widehat{A\hat{D}B} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Gamma} = \frac{\widehat{A}}{2} + 25^\circ = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ.$$

β) Ισχύει ότι:

$$\widehat{M\hat{A}D} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} - \widehat{M\hat{A}\Gamma} = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ \text{ και } \widehat{\Delta\hat{A}H} = \widehat{A\hat{D}B} - \widehat{H\hat{A}B} = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ.$$





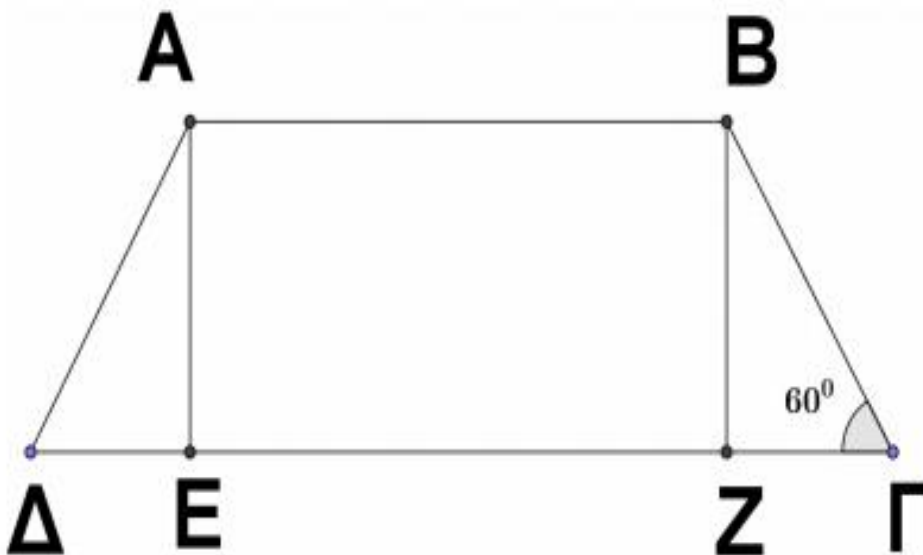
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)



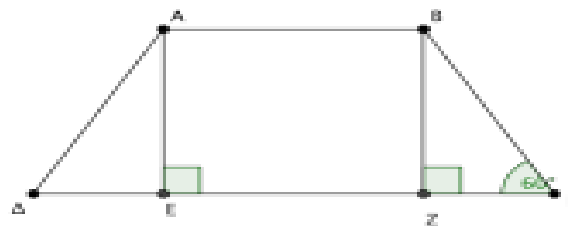


α) Οι γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες, άρα
 $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 120^\circ.$$

Άρα και $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$ ως γωνίες στη βάση AB του ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AED και $BZ\Gamma$ έχουν:

$AD = B\Gamma$, διότι το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι ισοσκελές

$$\hat{A} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$$

Άρα τα τρίγωνα AED και $BZ\Gamma$ είναι ίσα επειδή έχουν ίσες υποτείνουσες και προσκείμενες σ' αυτές οξείες γωνίες ίσες.

γ) Είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $A\hat{B}Z = 90^\circ$, άρα $Z\hat{B}\Gamma = \hat{B} - A\hat{B}Z = 30^\circ$.

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Gamma$ ισχύει ότι: $Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Επειδή, τα τρίγωνα AED και $BZ\Gamma$ είναι ίσα, έχουν και $DE = Z\Gamma = 2$.

Το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο διότι οι γωνίες E και Z είναι ορθές και $E\hat{A}B = 90^\circ$ διότι οι γωνίες E και EAB είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB και $\Delta\Gamma$ που τέμνονται από την AE .

Επομένως ισχύει ότι $EZ = AB = 6$.

$$\text{Οπότε: } \Delta\Gamma = DE + EZ + Z\Gamma = 2 + 6 + 2 = 10.$$

Η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ είναι:

$$\Pi = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 10 + 4 = 24.$$



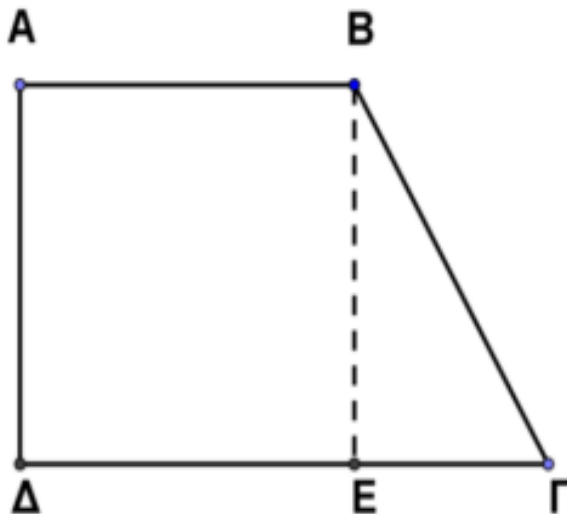
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = B\Gamma = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος BE από τη κορυφή B .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε $2E\Gamma = B\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος MN . (Μονάδες 8)





α) Είναι $AD \perp AB$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα και $AD \perp \Gamma\Delta$, οπότε $\hat{D} = 90^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 120^\circ.$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $BE\Gamma$, έχουμε:

$$\epsilon\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \epsilon\hat{B}\Gamma + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \epsilon\hat{B}\Gamma = 30^\circ.$$

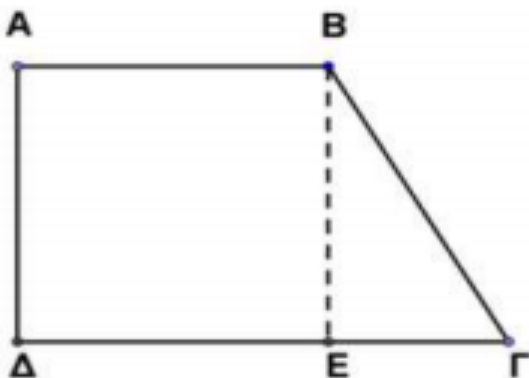
Άρα η απέναντι κάθετη πλευρά $E\Gamma$ της $\epsilon\hat{B}\Gamma$ στο τρίγωνο $BE\Gamma$ ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Gamma$.

$$\gamma) \text{ Είναι } E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Τα τμήματα AD και BE σχηματίζουν ορθές γωνίες με τις παράλληλες πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ άρα το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε $AB = \Delta E = 4$.

Το τμήμα MN ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου, οπότε είναι διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ και ισχύει ότι:

$$MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + \Delta E + E\Gamma}{2} = \frac{4 + 4 + 2}{2} = 5.$$



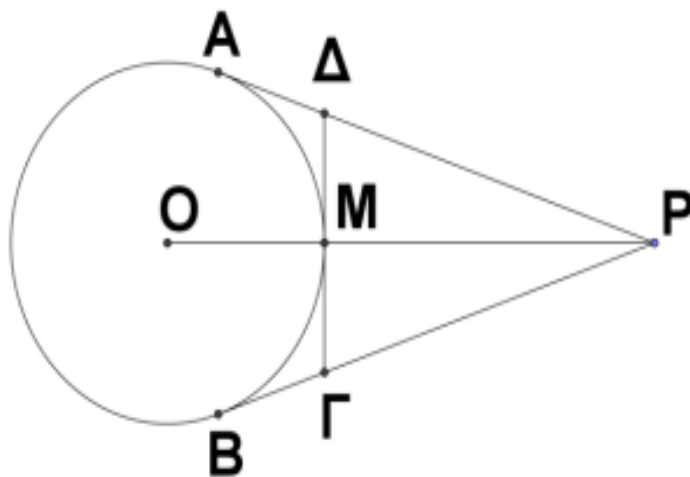


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος κέντρου O , και από ένα σημείο P εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

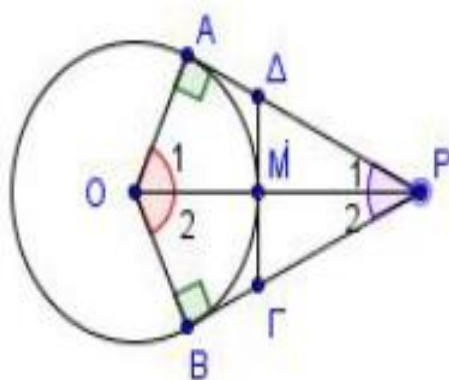
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία APB είναι 40° να υπολογίσετε τη γωνία AOB . (Μονάδες 12)





α) Η ακτίνα OM έχει άκρο το σημείο επαφής M άρα είναι κάθετη στην εφαπτομένη $\Delta\Gamma$. Η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων PA και PB , δηλαδή την $\widehat{APB}$. Οπότε στο τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ η PM είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου $OAPB$ είναι 360° . Οπότε:
 $\widehat{AOB} + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{P} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOB} + 90^\circ + 90^\circ + 40^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 140^\circ$.



ΘΕΜΑ 2

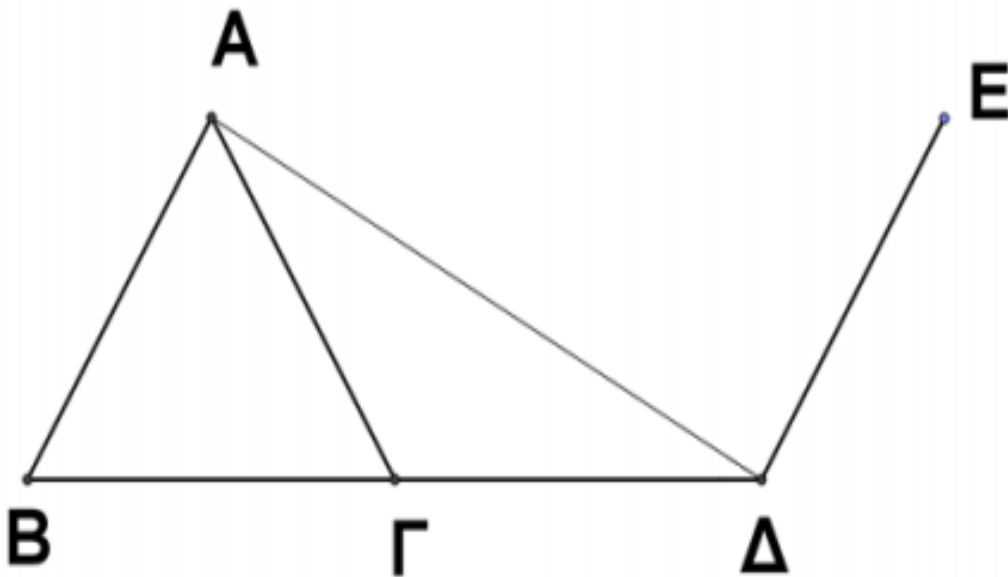
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην AD στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $\Delta E=B\Gamma$. (A και E στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $AB\Delta E$ παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)





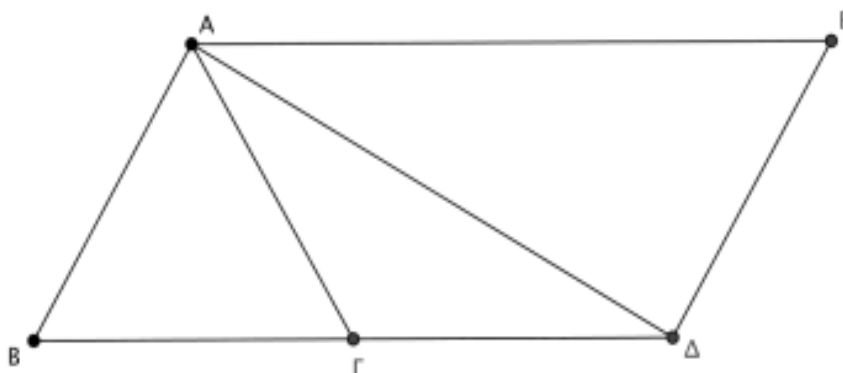
α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 60^\circ$. Τότε $\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = 180^\circ - \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 120^\circ$.

Επειδή $\Gamma\Delta = B\Gamma = A\Gamma$, το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{A\hat{\Delta}\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} + \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} + \widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 30^\circ$$

άρα και $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 30^\circ$. Τότε: $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.



β) Επειδή, $AB \perp AD$ και $ED \perp AD$ είναι $AB \parallel ED$.

Όμως $AB = BG = ED$ και $AB \parallel ED$, οπότε το τετράπλευρο $ABDE$ έχει τις απέναντι πλευρές του AB και DE ίσες και παράλληλες και συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.



ΘΕΜΑ 2

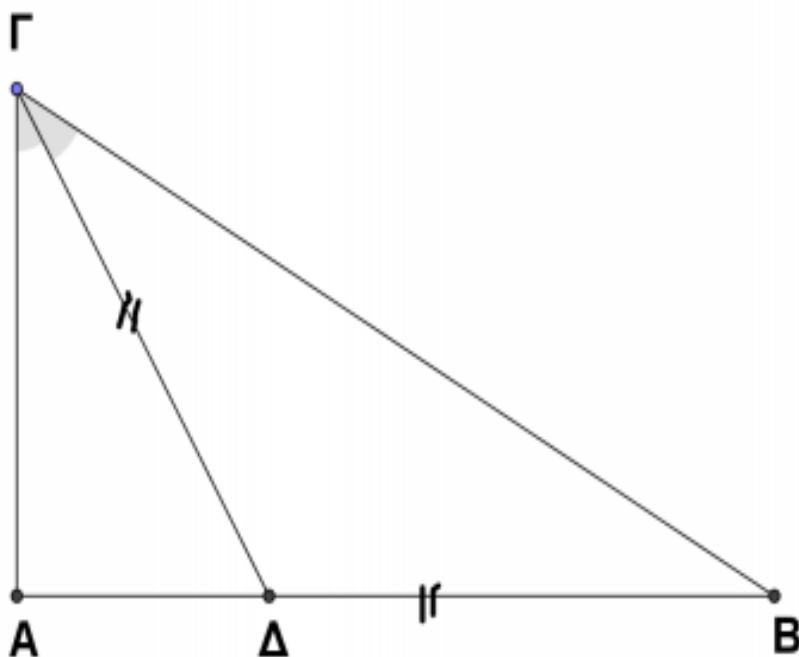
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^\circ$.

(Μονάδες 12)

β) $AB = 3\text{cm}$

(Μονάδες 13)





α) Επειδή $\Gamma\Delta = \Delta B$, το τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

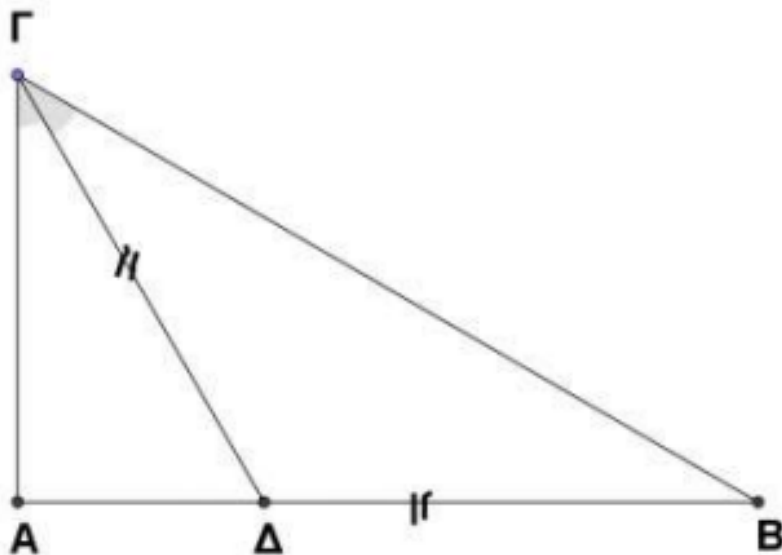
$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

Τότε από την (1) είναι $\hat{B} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 30^\circ$. Άρα η πλευρά $A\Delta$ η οποία είναι απέναντι από τη γωνία $\Delta\Gamma A$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας $\Gamma\Delta$, δηλαδή:

$$A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}.$$

Τότε: $AB = A\Delta + \Delta B = 1 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}.$





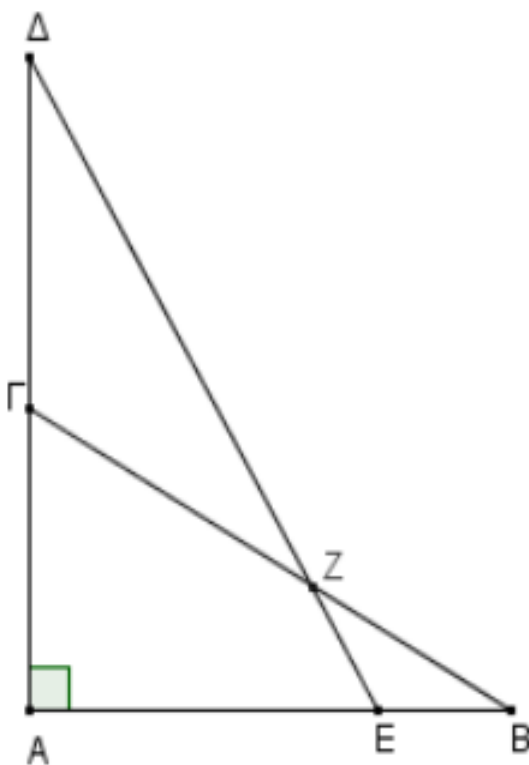
ΘΕΜΑ 2

Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία A ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ.$$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AEZ\Gamma$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και EBZ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)





α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 30^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta E$, είναι:

$$\hat{A} + \hat{\Delta} + \hat{A\hat{E}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 30^\circ + \hat{A\hat{E}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ.$$

Η γωνία $\hat{A\hat{E}\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $E\hat{Z}B$, οπότε ισχύει:

$$\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{E\hat{Z}B} + \hat{B} \Leftrightarrow 60^\circ = \hat{E\hat{Z}B} + 30^\circ \Leftrightarrow \hat{E\hat{Z}B} = 30^\circ.$$

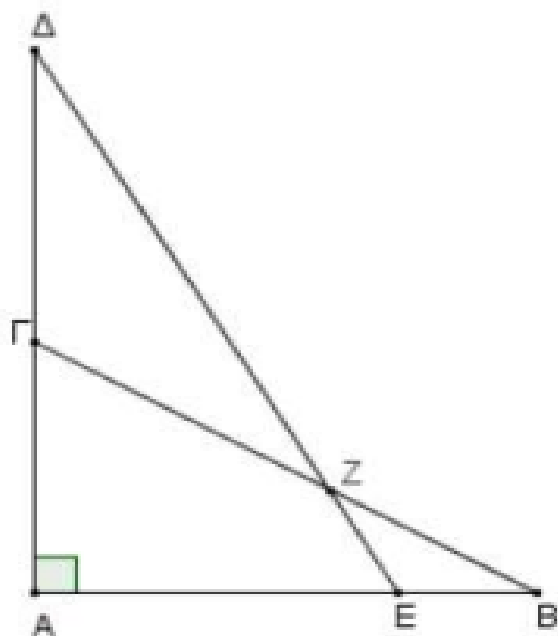
Οι γωνίες $\hat{\Gamma\hat{Z}E}$ και $\hat{E\hat{Z}B}$ είναι παραπληρωματικές οπότε ισχύει:

$$\hat{\Gamma\hat{Z}E} + \hat{E\hat{Z}B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma\hat{Z}E} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma\hat{Z}E} = 150^\circ.$$

β) Επειδή $\hat{E\hat{Z}B} = \hat{B} = 30^\circ$, το τρίγωνο EBZ είναι ισοσκελές.

Επειδή οι γωνίες $\hat{E\hat{Z}B}$ και $\hat{\Gamma\hat{Z}\Delta}$ είναι κατακορυφήν, ισχύει ότι $\hat{\Gamma\hat{Z}\Delta} = \hat{E\hat{Z}B} = 30^\circ$.

Άρα $\hat{\Gamma\hat{Z}\Delta} = \hat{\Delta}$, οπότε το τρίγωνο $\Gamma Z\Delta$ είναι ισοσκελές.



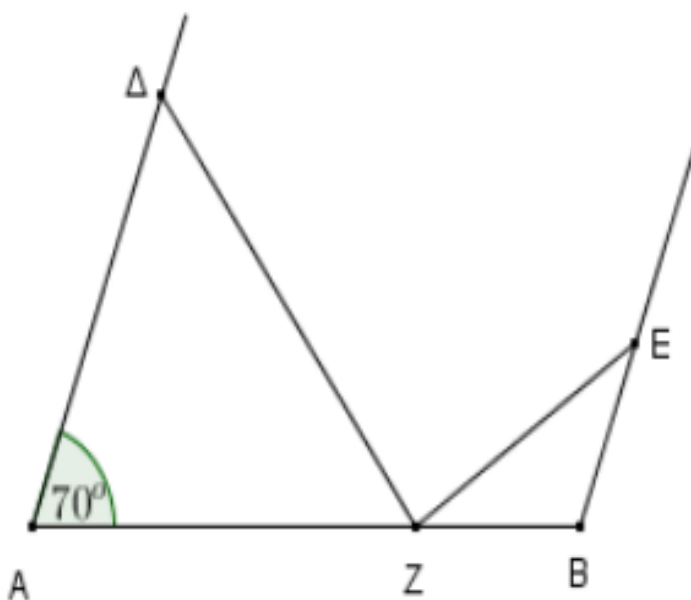


ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, οι AD και BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $AD=AZ$, $BE=BZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $A\Delta Z$ και BZE . (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta ZE} = 90^\circ$. (Μονάδες 9)





α) Επειδή $AD = DZ$, το τρίγωνο ADZ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{D} = \hat{DZA}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ADZ , και τη σχέση (1) έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{DZA} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 2\hat{D} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{D} = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{D} = 55^\circ. \text{ Οπότε } \hat{DZA} = \hat{D} = 55^\circ.$$

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD , BE που τέμνονται από την AB , οπότε είναι παραπληρωματικές. Άρα:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 110^\circ.$$

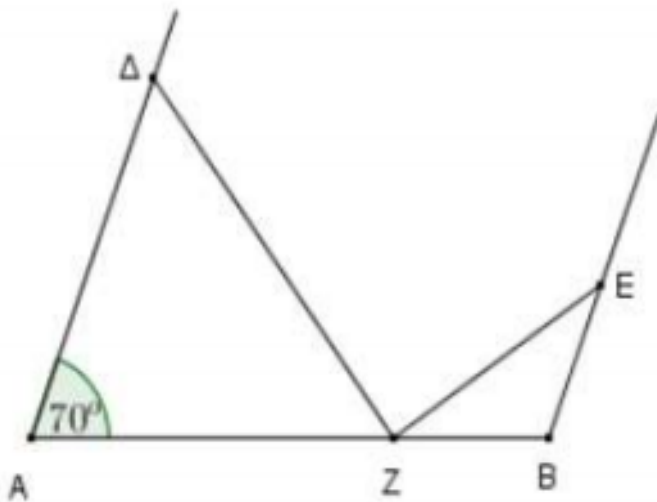
Επειδή, $BE = BZ$, το τρίγωνο BEZ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{E} = \hat{EZB}$ (2).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEZ έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{E} + \hat{EZB} = 180^\circ \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 110^\circ + 2\hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 35^\circ.$$

Οπότε $\hat{EZB} = \hat{E} = 35^\circ$.

β) Ισχύει ότι: $\hat{DZE} = 180^\circ - \hat{DZA} - \hat{EZB} = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$.





ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $AD=BG$ και $AG=BE$.

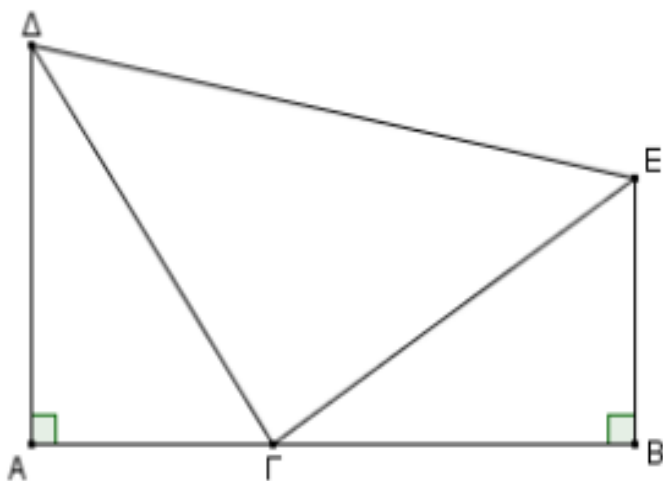
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AGD και BGE είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $\hat{EGB} = 40^\circ$ τότε το τρίγωνο DGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)





α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:

$AD = BG$, από υπόθεση

$AG = BE$, από υπόθεση

Οπότε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα αφού έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες .

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι $ΔΓ = ΓΕ$, οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΓΕ είναι:

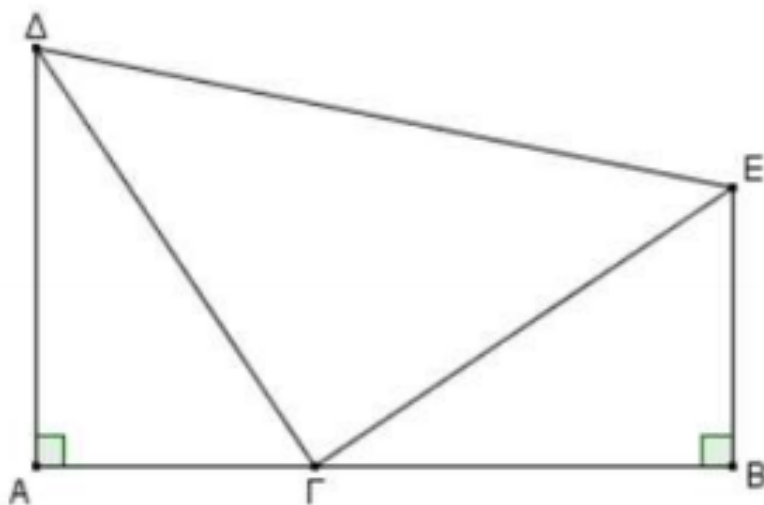
$$\widehat{ΕΓΒ} + \widehat{Β} + \widehat{ΒΕΓ} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 90^\circ + \widehat{ΒΕΓ} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΒΕΓ} = 50^\circ.$$

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι $\widehat{ΔΓΑ} = \widehat{ΒΕΓ}$ (ως απέναντι των ίσων πλευρών ΑΔ και ΒΓ). Άρα $\widehat{ΔΓΑ} = \widehat{ΒΕΓ} = 50^\circ$.

Ισχύει ότι:

$$\widehat{ΔΓΑ} + \widehat{ΔΓΕ} + \widehat{ΕΓΒ} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \widehat{ΔΓΕ} + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΔΓΕ} = 90^\circ.$$

Άρα το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.





ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η AD είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $AD = DE$.

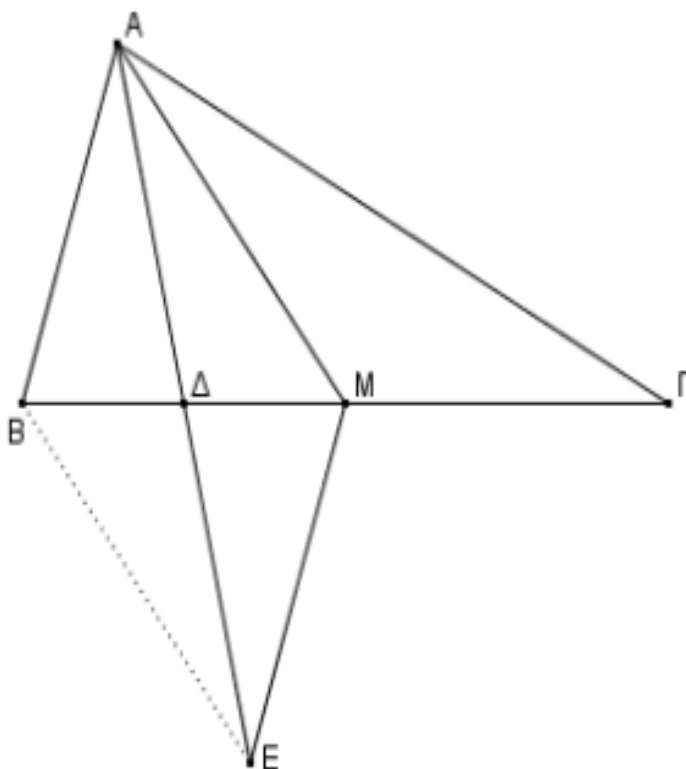
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

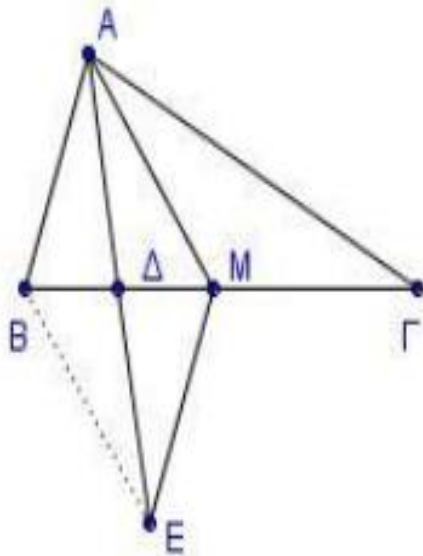
β) $ME = M\Gamma$

(Μονάδες 13)





α) Είναι $AD = DE$ από υπόθεση και $BD = DM$ (επειδή η AD είναι διάμεσος στο τρίγωνο ABM). Άρα οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ABEM$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Επειδή $ME = AB$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ισχύει ότι:

$$BG = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow ME = MG.$$



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$.

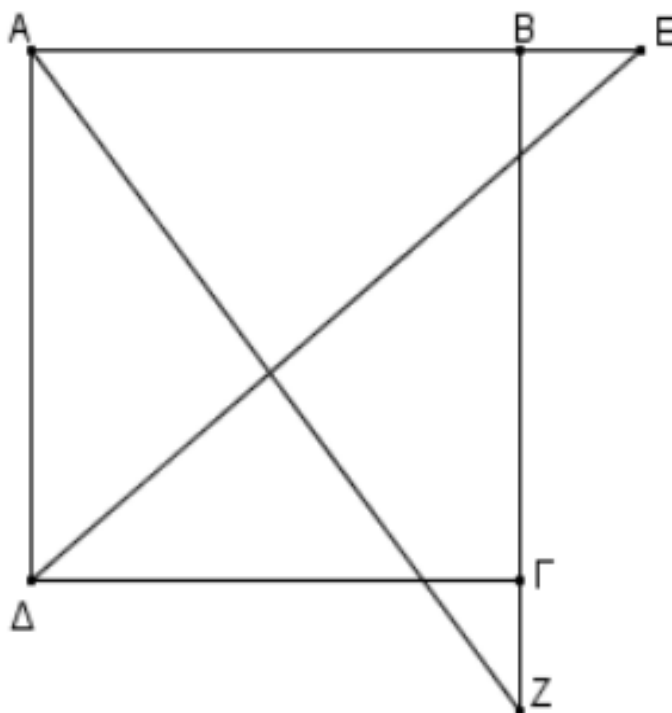
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABZ και $A\epsilon\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες $\epsilon\Delta\Gamma$ και AZB είναι ίσες.

(Μονάδες 13)





1643

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και $AE\Delta$ έχουν:

$A\Delta = AB$, ως πλευρές του τετραγώνου

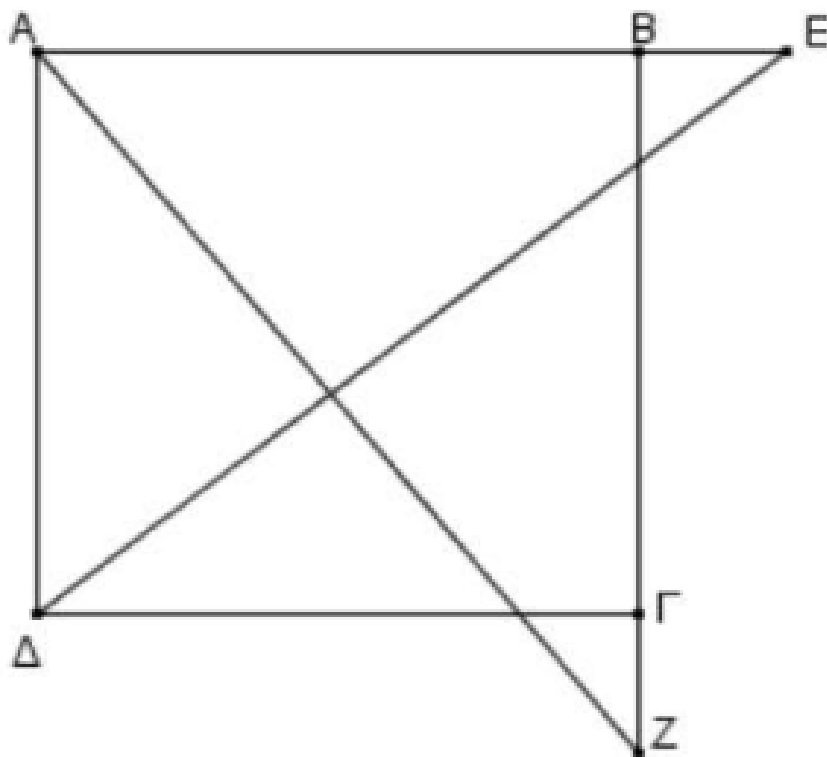
$AE = BZ$, διότι $AB = B\Gamma$ (πλευρές τετραγώνου) και $BE = \Gamma Z$ οπότε $AB + BE = B\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow AE = BZ$.

Άρα τα τρίγωνα ABZ και $AE\Delta$ είναι ίσα αφού έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες.

β) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{A}\hat{Z}B$ (1) επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές $A\Delta$ και AB . Ισχύει επίσης ότι:

$\hat{A}\hat{E}\Delta = \hat{E}\hat{\Delta}\Gamma$ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την ΔE .

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{Z}B = \hat{E}\hat{\Delta}\Gamma$.



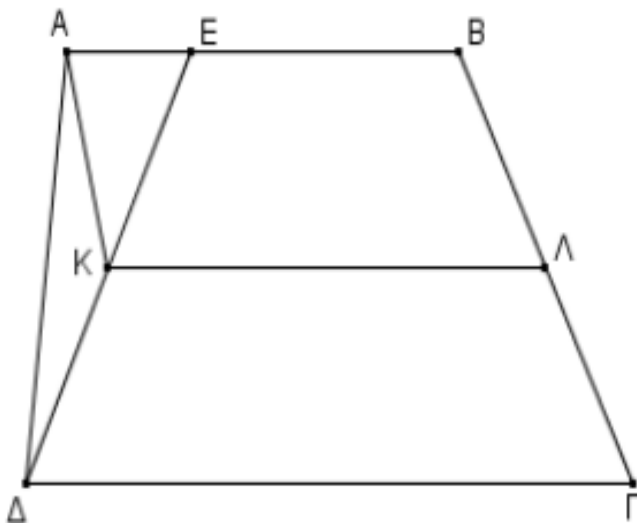


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=3$, $\Gamma\Delta=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των ED και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπεζιου $EB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)





1644

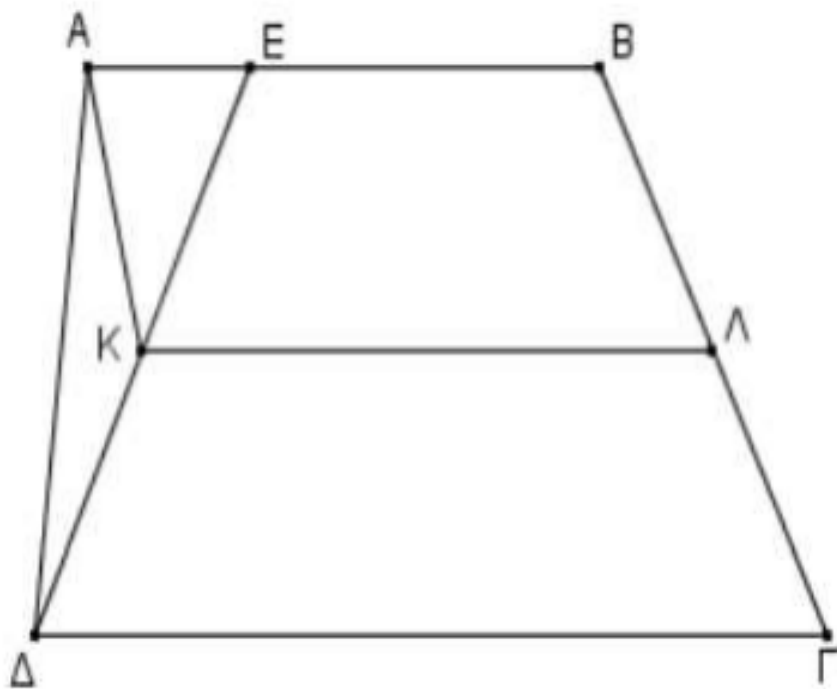
α) Είναι $EB = AB - AE = 3 - 1 = 2$. Επειδή KL διάμεσος του τραπεζίου $EBΓΔ$ έχουμε:

$$KL = \frac{EB + ΓΔ}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

β) Επειδή KL διάμεσος του τραπεζίου $EBΓΔ$ ισχύει ότι:

$$KL \parallel EB \text{ ή } KL \parallel AB \text{ και } KL = 3 = AB.$$

Άρα στο τετράπλευρο $ABLK$ οι απέναντι πλευρές του AB και KL είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



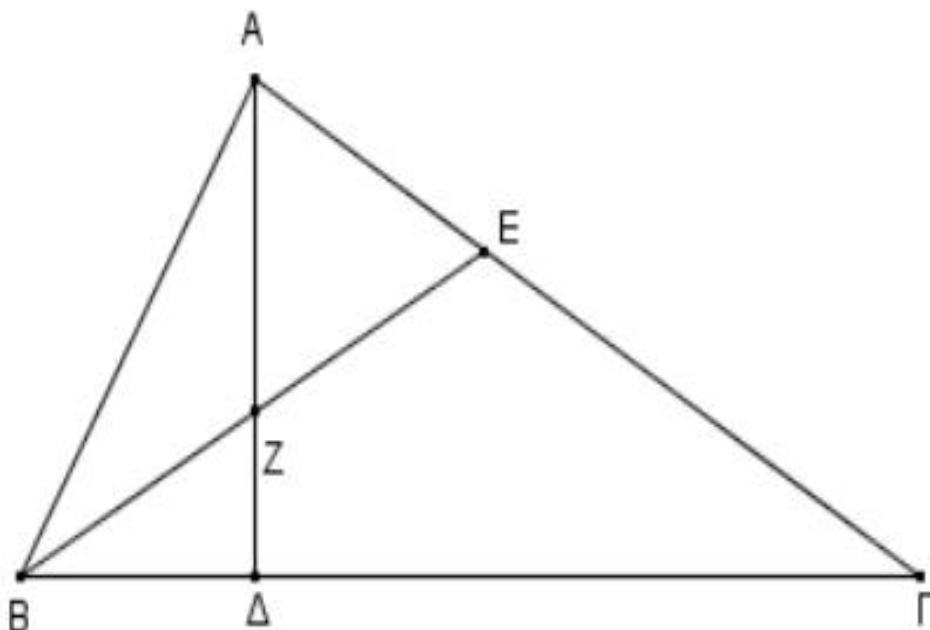


ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι 60° . (Μονάδες 10)

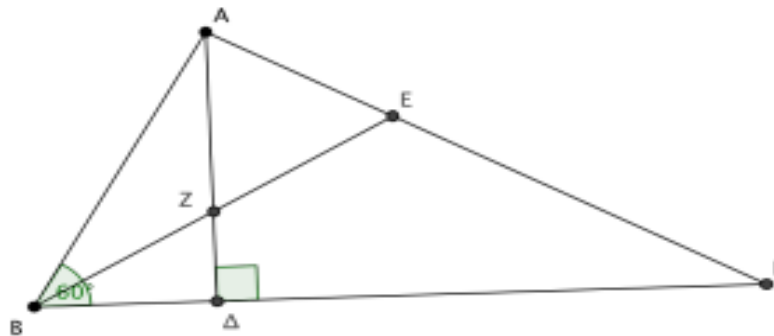
β) Αν το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 15)





α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ.$$



β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + 60^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ.$$

$$\text{Τότε: } \hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{A} + 30^\circ = 2 \cdot 60^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΕ έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{ABE} + \hat{AEB} &= 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{AEB} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{60^\circ}{2} + \hat{AEB} = 90^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 30^\circ + \hat{AEB} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{AEB} = 60^\circ. \end{aligned}$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΑΔΓ έχουμε:

$$\hat{GAD} + \hat{\Delta} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{GAD} + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{GAD} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{GAD} = 60^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{ZAE} + \hat{AZE} + \hat{AEZ} &= 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{AZE} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{AZE} = 180^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{AZE} = 60^\circ. \end{aligned}$$

Το τρίγωνο ΑΖΕ έχει όλες τις γωνίες του ίσες οπότε είναι ισόπλευρο.



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B . Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$

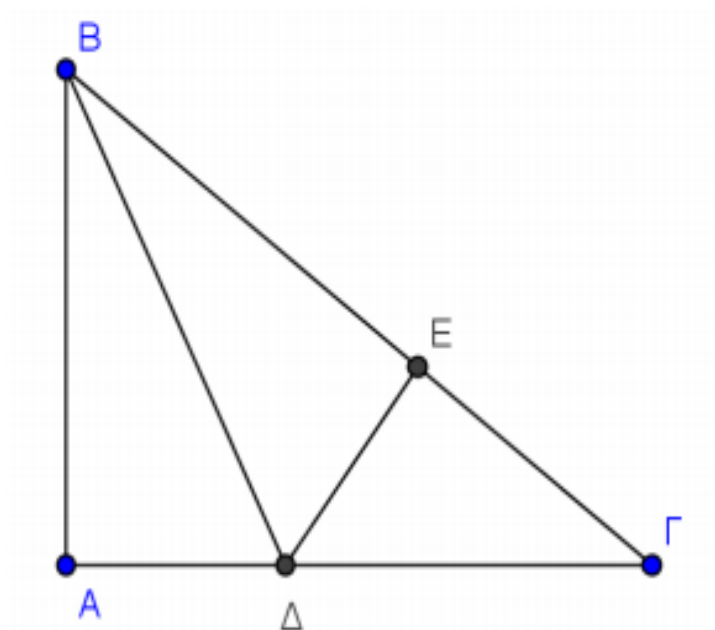
(Μονάδες 8)

β) $AD < \Delta\Gamma$

(Μονάδες 9)

γ) $A\Gamma > AB$

(Μονάδες 8)

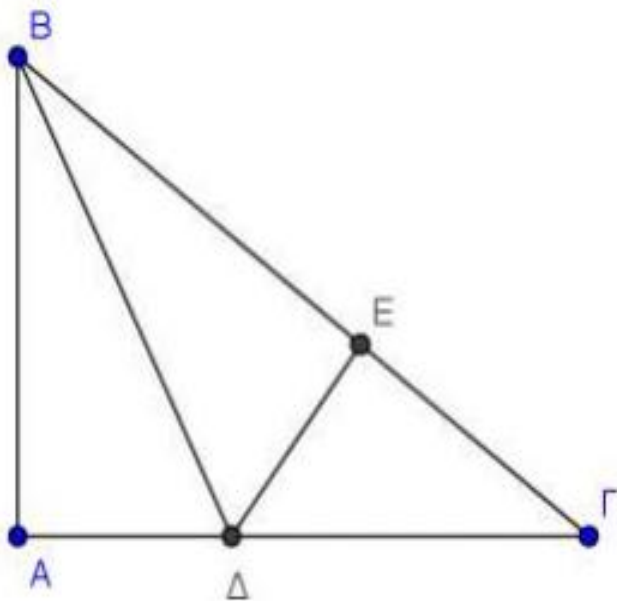




α) Το σημείο Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Β άρα ισαπέχει από τις πλευρές ΒΑ, ΒΓ της γωνίας αυτής. Οπότε $AD = DE$ αφού $AD \perp AB$ και $DE \perp BG$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ η ΔΓ είναι απέναντι από την ορθή γωνία Ε, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Οπότε $ΔΓ > ΔΕ$. Επειδή $AD = DE$, προκύπτει ότι: $AD < ΔΓ$.

γ) Γνωρίζουμε ότι σ' ένα τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\Gamma} < \hat{B}$ οπότε $AB < ΑΓ$.





ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

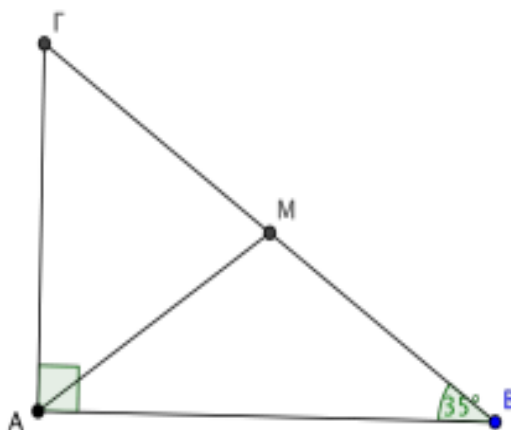
α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ . (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB . (Μονάδες 15)



1647

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 55^\circ$.



β) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του $AB\Gamma$,

$$\text{άρα } AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB.$$

Επειδή $AM = MB$, το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές, άρα $\hat{BAM} = \hat{B} = 35^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AMB είναι:

$$\hat{AMB} + \hat{BAM} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AMB} + 35^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AMB} = 110^\circ.$$



ΘΕΜΑ 2

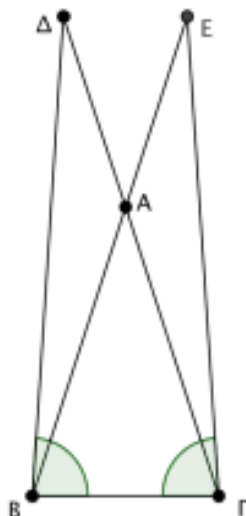
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A\Delta = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

- | | |
|--------------------------------------|--------------|
| α) $BE = \Gamma\Delta$ | (Μονάδες 6) |
| β) $B\Delta = \Gamma E$ | (Μονάδες 10) |
| γ) $\hat{B}\Gamma = \hat{E}\Gamma B$ | (Μονάδες 9) |



α) Επειδή $AB = AG$ και $AE = AD$ είναι $AB + AE = AG + AD \Leftrightarrow BE = GD$.



β) Τα τρίγωνα ΔBA και $\epsilon A \Gamma$ έχουν:

$AB = AG$, από υπόθεση

$AD = AG$, από υπόθεση

$\widehat{\Delta AB} = \widehat{\epsilon A \Gamma}$, ως κατακορυφήν.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔBA και $\epsilon A \Gamma$ είναι ίσα οπότε $BD = GE$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta AB}$, $\widehat{\epsilon A \Gamma}$.

γ) Τα τρίγωνα ΔBA και $\epsilon A \Gamma$ είναι ίσα οπότε: $\widehat{\Delta BA} = \widehat{\epsilon A \Gamma}$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές AD και AE . Το τρίγωνο $AB \Gamma$ είναι ισοσκελές συνεπώς: $\widehat{\Gamma BA} = \widehat{B \Gamma A}$. Άρα $\widehat{\Delta BA} + \widehat{\Gamma BA} = \widehat{\epsilon A \Gamma} + \widehat{B \Gamma A}$ ή $\widehat{\Delta B \Gamma} = \widehat{\epsilon \Gamma B}$.



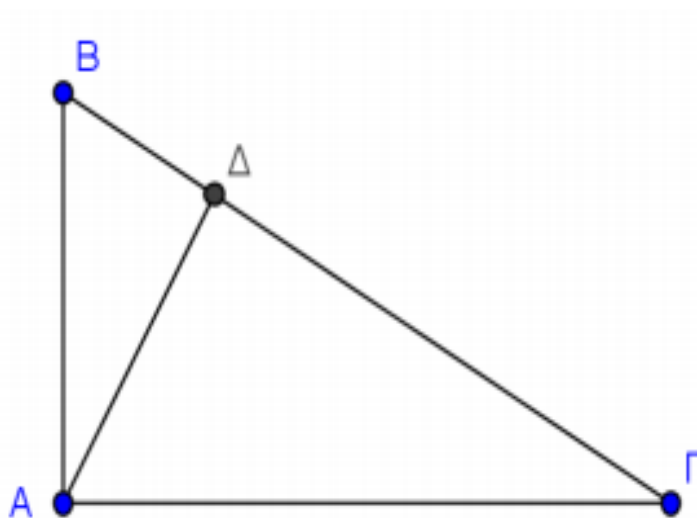
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και AD το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογιστεί η γωνία $BA\Delta$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 9)





α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

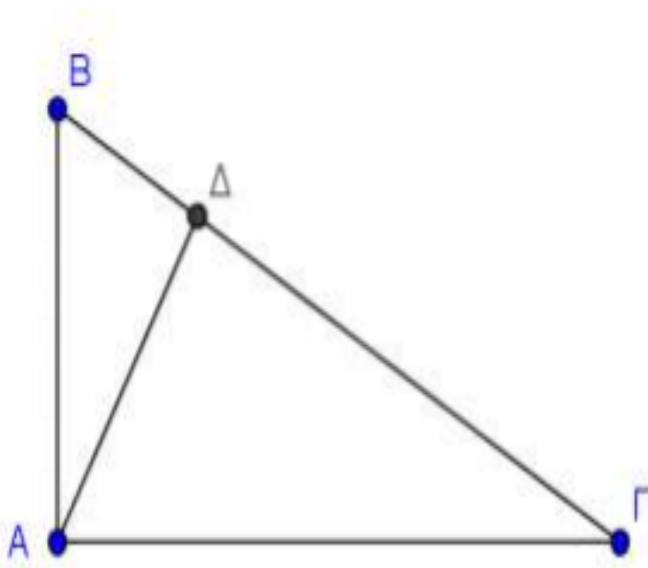
$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ \text{ και } \hat{B} = 2\hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ είναι:

$$\hat{B} + \hat{B\hat{A}\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{B\hat{A}\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B\hat{A}\Delta} = 30^\circ.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\hat{B\hat{A}\Delta} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά είναι

ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $B\Delta = \frac{AB}{2}$.





ΘΕΜΑ 2

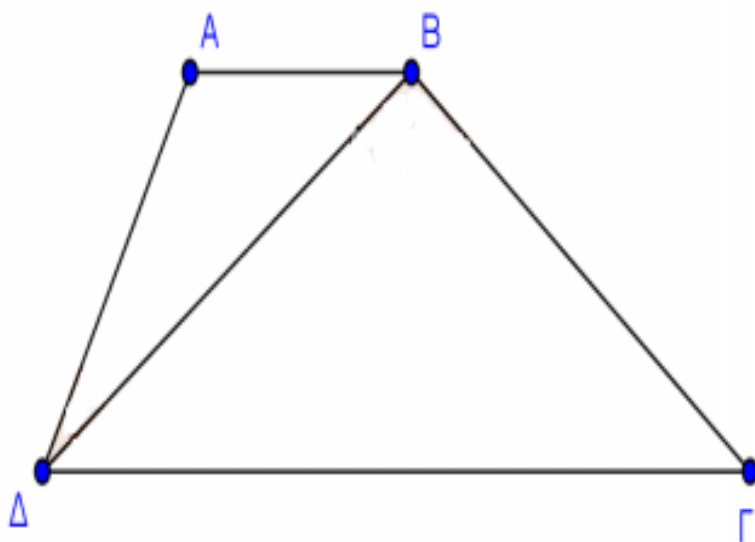
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\hat{\Delta B \Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{A \Delta B} = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

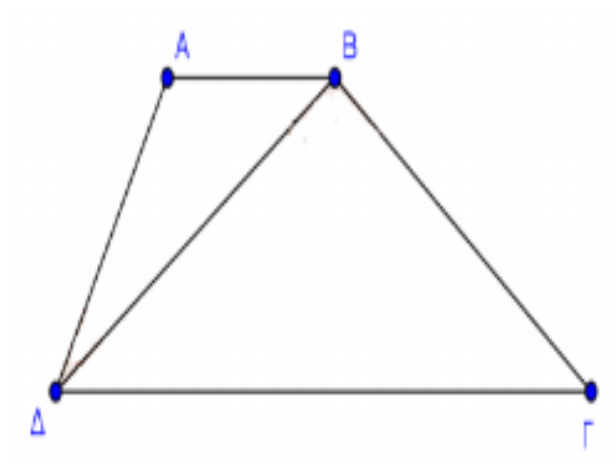
α) Τη γωνία Γ .

(Μονάδες 11)

β) Τη γωνία A .

(Μονάδες 14)





α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με $ΒΔ = ΒΓ$, άρα $\widehat{ΒΔΓ} = \widehat{Γ}$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΓ έχουμε:

$$\widehat{ΒΔΓ} + \widehat{Γ} + \widehat{ΔΒΓ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{Γ} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{Γ} = 70^\circ \Leftrightarrow \widehat{Γ} = 35^\circ$$

β) Είναι $\widehat{ΒΔΓ} = \widehat{Γ} = 35^\circ$ οπότε $\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{ΑΔΒ} + \widehat{ΒΔΓ} = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$

Οι γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{ΑΔΓ}$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ και είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$\widehat{Α} + \widehat{ΑΔΓ} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Α} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Α} = 120^\circ$$



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $\hat{A}BE$

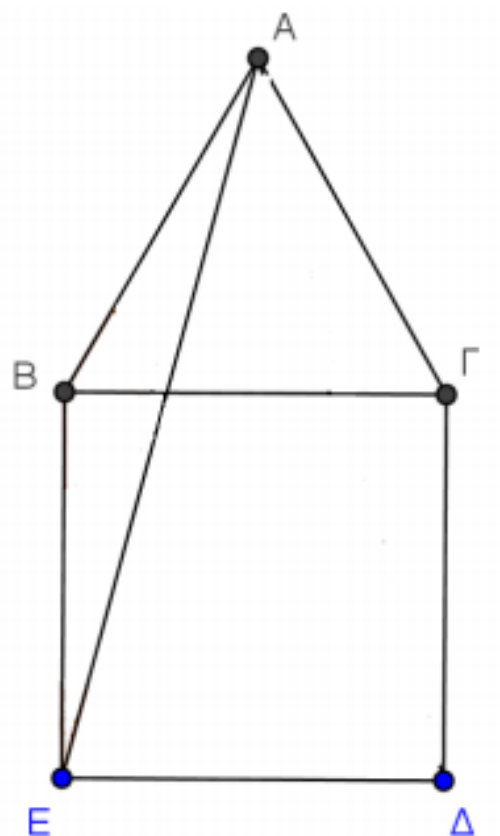
(Μονάδες 8)

ii. $\hat{B}EA$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)





α) i. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο είναι $\widehat{AB\Gamma} = 60^\circ$.

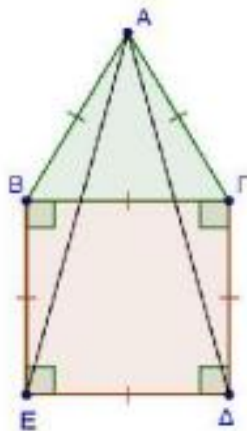
Επίσης $\widehat{E\Gamma\Delta} = 90^\circ$ διότι το $B\Gamma\Delta E$ είναι τετράγωνο.

Τότε $\widehat{ABE} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{E\Gamma\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

ii. Επειδή $AB = B\Gamma = BE$, το τρίγωνο BEA είναι ισοσκελές
οπότε $\widehat{BEA} = \widehat{BAE}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEA βρίσκουμε:

$$\widehat{BEA} + \widehat{BAE} + \widehat{ABE} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\widehat{BEA} + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{BEA} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{BEA} = 15^\circ$$



β) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$
- $BE = \Gamma\Delta$, ως πλευρές του τετραγώνου $B\Gamma\Delta E$
- $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma B} + \widehat{B\Gamma\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = \widehat{ABE}$

Σύμφωνα με το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = A\Delta$,
άρα το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.



ΘΕΜΑ 2

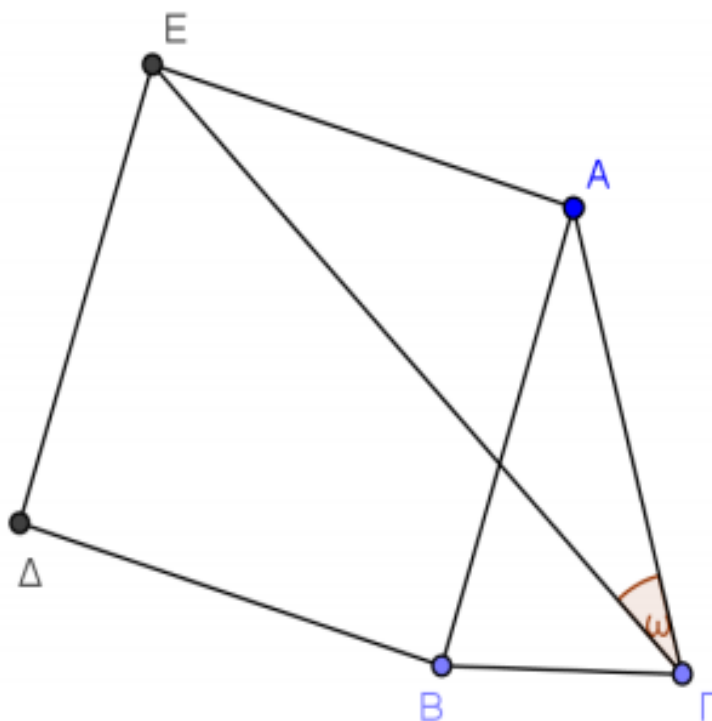
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

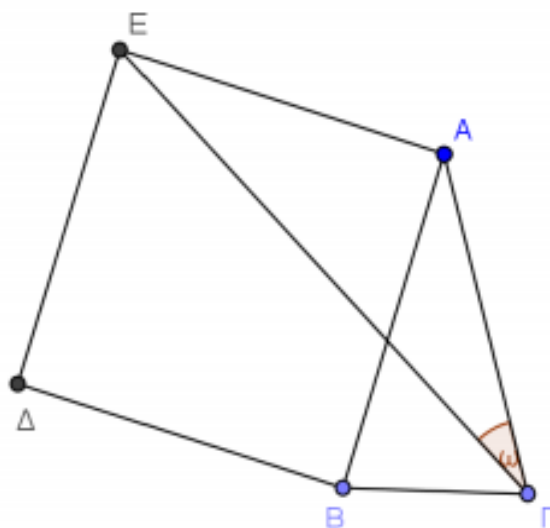
β) $2 \cdot \hat{E\Gamma A} = 90^\circ - \hat{B\hat{A}\Gamma}$.

(Μονάδες 15)





1652



α) Είναι $AB = AE$ ως πλευρές τετραγώνου και $AB = AG$ από υπόθεση. Άρα $AE = AG$,
οπότε το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές ισχύει ότι $\widehat{AEG} = \widehat{EGA}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AEG έχουμε:

$$\widehat{AEG} + \widehat{AEG} + \widehat{EGA} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\widehat{EGA} + \widehat{EAB} + \widehat{BAG} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{EGA} + 90^\circ + \widehat{BAG} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\widehat{EGA} = 90^\circ - \widehat{BAG}$$



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $ΑΓΔΕ$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο A είναι μέσο του BE .

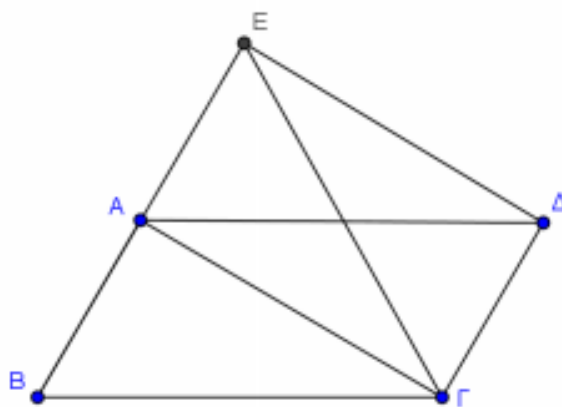
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

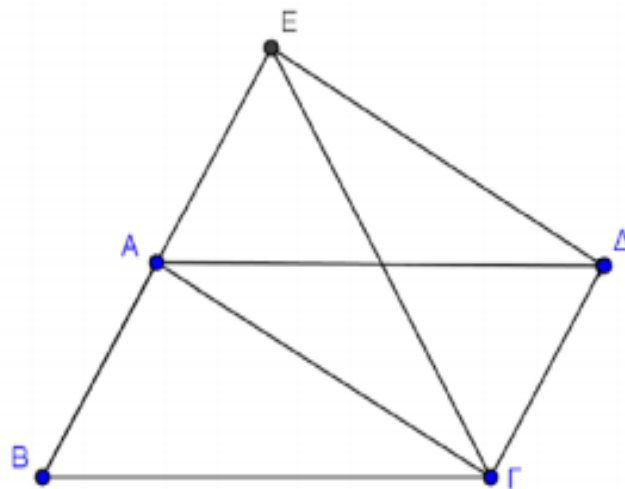
γ) $\hat{B\Gamma A} = \hat{A\Delta E}$

(Μονάδες 8)





1653



α) Είναι $AB = \Gamma\Delta$ (1) και $AB \parallel \Gamma\Delta$ (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Επίσης $AE = \Gamma\Delta$ (3) και $AE \parallel \Gamma\Delta$ (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $A\Gamma\Delta E$.

Άρα από (2), (4) προκύπτει ότι $AB \parallel AE$ άρα τα B , A και E είναι συνευθειακά και επειδή $AB = AE$, λόγω των (1), (3), το σημείο A είναι μέσο του BE .

β) Είναι $AD = B\Gamma$ (5) διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Επίσης $AD = \Gamma E$ (6) διότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες. Άρα από (5), (6) βρίσκουμε $B\Gamma = \Gamma E$, οπότε το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{\Gamma\Delta A}$ (7), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AD , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$ και $\widehat{A\Delta E} = \widehat{\Gamma\Delta A}$ (8) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$, ΔE που τέμνονται από την $A\Delta$. Άρα από (7), (8) ισχύει $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Delta E}$.