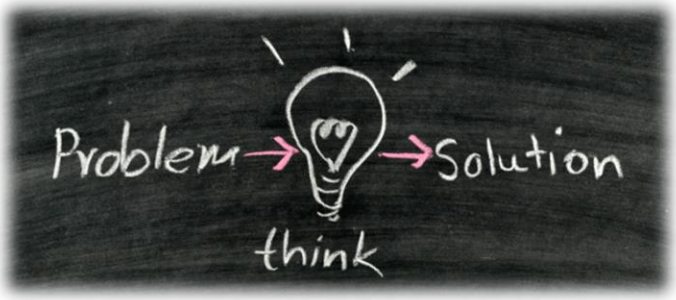
1238

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$ (Μονάδες 10)



α) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$-2x^2+10x-12=0 \overset{:(-2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

Για $\alpha=1$, $\beta=-5$ και $\gamma=6$, βρίσκουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

β) Πρέπει:

$$x-2\neq0\Leftrightarrow x\neq2$$

Τότε ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x=3 \text{ ή } x=2)$$

Η ρίζα $x=2$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=3$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

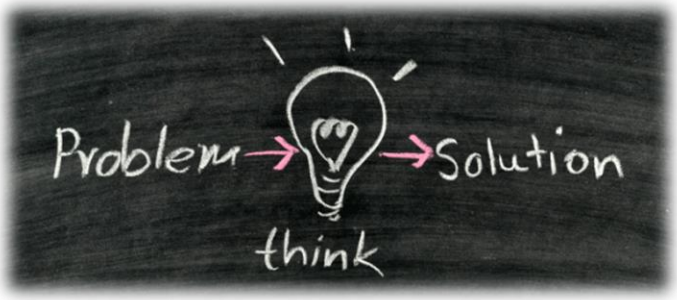
α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x \geq 2$, $A=3x-4$

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$$ (Μονάδες 13)



α) i) Ισχύει ότι:

$$x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 3\cdot 2 \Leftrightarrow 3x-6 \geq 0$$

Άρα $|3x-6|=3x-6$

Τότε:

$$A=|3x-6|+2=3x-6+2=3x-4$$

ii) Ισχύει ότι:

$$x<2 \Leftrightarrow 3x<3\cdot 2 \Leftrightarrow 3x-6<0$$

Άρα $|3x-6|=-(3x-6)=6-3x$

Τότε:

$$A=|3x-6|+2=6-3x+2=8-3x$$

β) Για κάθε $x \geq 2$ είναι $|3x-6|=3x-6$. Τότε:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=\frac{(3x)^2-4^2}{3x-6+2}=\frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4}=3x+4$$

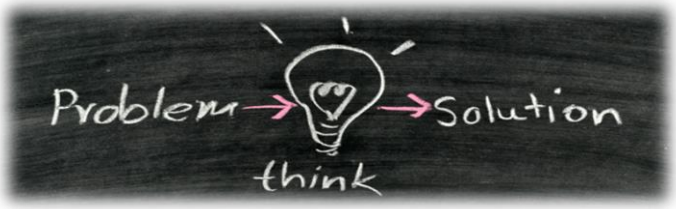
1240

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο *ν-οστός* όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)



α) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + (2-1)\omega = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -\omega \quad (1)$$

και

$$\alpha_4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 + (4-1)\omega = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow -\omega + 3\omega = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\omega = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = -2$$

β) Ο ν – οστός όρος της αριθμητικής προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = -2 + (\nu - 1)\cdot 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = -2 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 4$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\alpha_\nu = 98 \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = 51$$

Άρα ο $51^{ος}$ όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

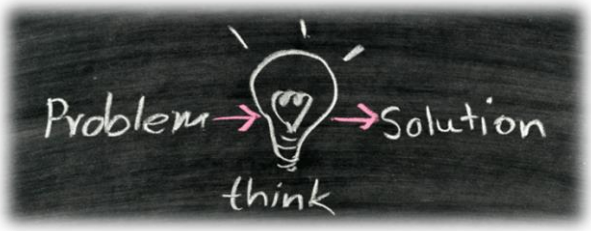
1241

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x+\beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x'x και y'y. (Μονάδες 12)



α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο A(1, 6) αν και μόνο αν:

$$f(1) = 6 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta = 6 - \alpha \quad (1)$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο B(– 1, 4) αν και μόνο αν:

$$f(-1) = 4 \Leftrightarrow \alpha \cdot (-1) + \beta = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\alpha + \beta = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow -\alpha + 6 - \alpha = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\alpha = 1$ στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\beta = 6 - 1 \Leftrightarrow \beta = 5$$

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, ο τύπος της f γράφεται $f(x) = x + 5$.

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(– 5, 0).

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0 + 5 = 5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B(0, 5).

1242

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x, $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

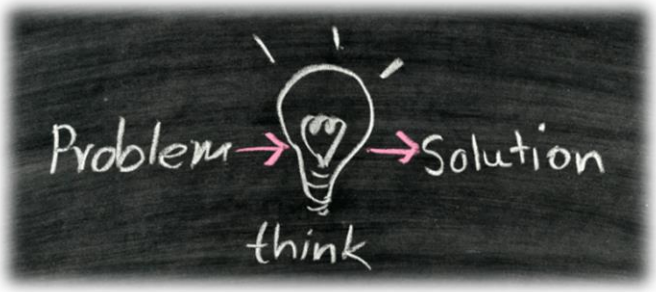
(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$

(Μονάδες 12)



α) Οι αριθμοί x, 2x + 1, 5x + 4 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2x+1)^2 = x\cdot(5x+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1 = 5x^2+4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=-1 \text{ ή } x=1)$$

β) i) Για x = 1 οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$1, 3, 9$$

Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{3}{1} = 3$.

ii) Για x = – 1 οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$-1, -1, -1$$

Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{-1}{-1} = 1$.

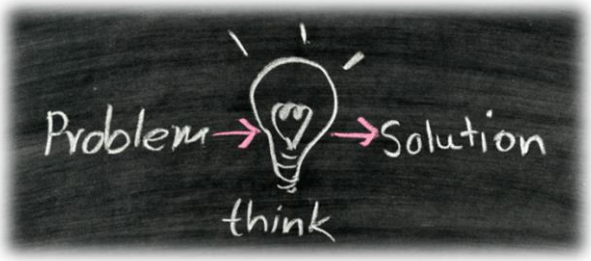
1243

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)



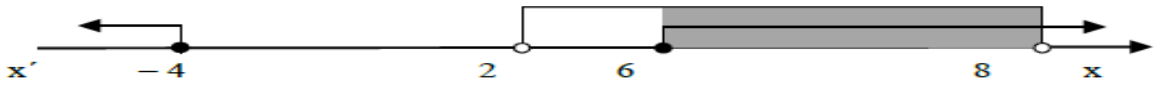
α) Είναι:

$$|x-1| \geq 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1 \leq -5 \text{ ή } x-1 \geq 5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \leq -4 \text{ ή } x \geq 6) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)$$

β) Ισχύει ότι:

$$d(x, 5) < 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-5| < 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3 < x-5 < 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3+5 < x-5+5 < 3+5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (2, 8)$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$6 \leq x < 8 \Leftrightarrow x \in [6, 8)$$

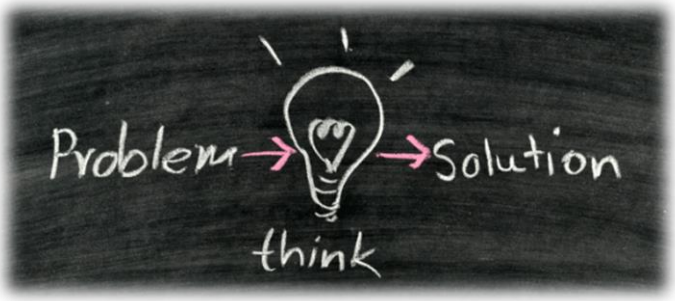
1244

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι *f(-1)= f(3)* (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: *f(x)=0* (Μονάδες 12)



α) Είναι:

$$f(-1)=2\cdot(-1)+4=-2+4=2 \text{ και}$$

$$f(3)=3-1=2$$

Άρα $f(-1)=f(3)$.

β) • Για $x<0$ είναι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$$

• Για $x\geq 0$ είναι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

1245

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό *x* ώστε οι αριθμοί : $x+2,\ (x+1)^2,\ 3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

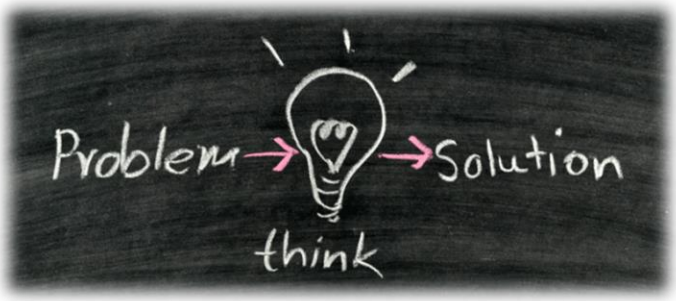
(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά *ω* της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) *x=1*

ii) *x= -1*.

(Μονάδες 12)



α) Οι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(x+1)^2 = \frac{x+2+3x+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{4x+4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)$$

β) i) Για $x = 1$ οι αριθμοί γράφονται $3, 4, 5$ και η διαφορά είναι $\omega = 1$.

ii) Για $x = -1$ οι αριθμοί γράφονται $1, 0, -1$ και η διαφορά είναι $\omega = -1$.

1246

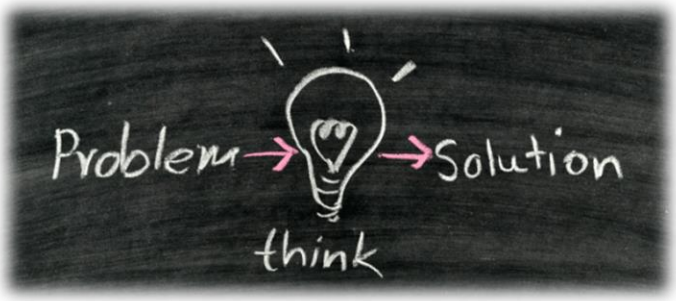
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=1$ και για $\lambda=-1$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



α) • Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$(1^2 - 1)x = (1 + 1)(1 + 2) \Leftrightarrow 0x = 6, \text{ αδύνατη}$$

• Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γίνεται:

$$((-1)^2 - 1)x = (-1 + 1)(-1 + 2) \Leftrightarrow 0x = 0, \text{ ταυτότητα}$$

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1 \neq 0 \text{ και } \lambda + 1 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq -1)$$

1247

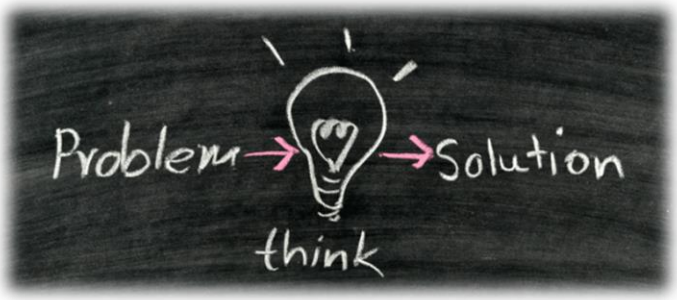
ΘΕΜΑ 2

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ***ν-οστής*** σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)



α) Από τα δεδομένα της άσκησης είναι $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$. Τότε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + (\nu - 1)20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + 20\nu - 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 100 + 20\nu$$

β) Η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{10} = 100 + 20 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 100 + 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 300 \text{ καθίσματα}$$

γ) Το γυμναστήριο έχει συνολικά:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(120 + 300) = 5 \cdot 420 = 2.100 \text{ καθίσματα}$$

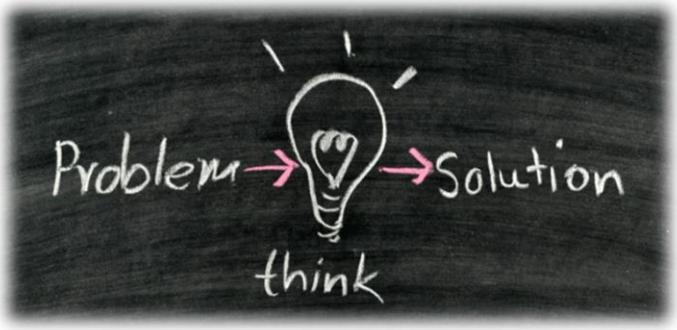
1248

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του *y* ισχύει : $|y-3|<1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν *x, y* είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού *E* του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow 2<y<4$$

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $E=xy$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες $1<x<3$ και $2<y<4$ βρίσκουμε:

$$1\cdot 2<xy<3\cdot 4 \Leftrightarrow 2<E<12$$

1249

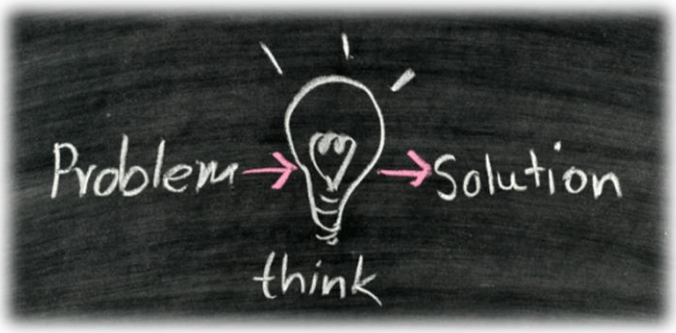
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)



α) Είναι:

$$\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (10-1)\omega - [\alpha_1 + (6-1)\omega] = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 5\omega = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\omega = 19 + 19 \cdot 6 = 19 + 114 = 133$$

γ) Ισχύει ότι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10(19 + 133) = 10 \cdot 152 = 1.520$$

1250

ΘΕΜΑ 2

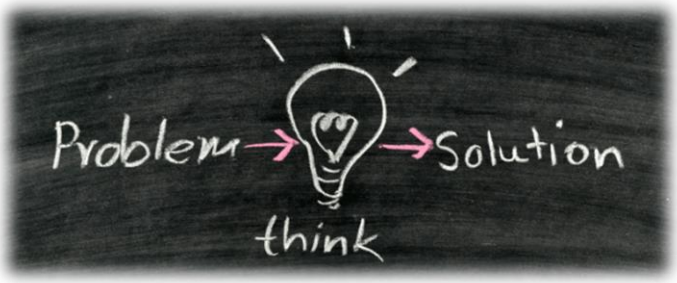
Δίνεται η παράσταση: $K = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$. (Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K. (Μονάδες 8)



α) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3+5}{4} = 2 \\ \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Τότε:

$$2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$$

β) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση Κ πρέπει ο παρονομαστής της να είναι διαφορετικός του μηδενός. Δηλαδή:

$$2x^2 - 3x - 2 \neq 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1 \neq 0 \text{ και } x - 2 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \neq -\frac{1}{2} \text{ και } x \neq 2\right)$$

γ) Για $x \neq -\frac{1}{2}$ και $x \neq 2$ ισχύει ότι:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x-2)^2}{(2x+1)(x-2)} = \frac{x-2}{2x+1}$$

1251

ΘΕΜΑ 2

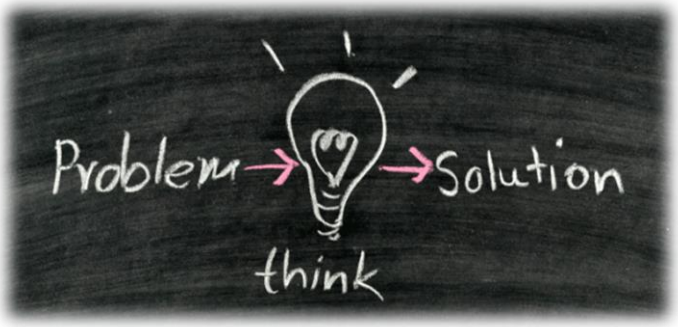
Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί ***α, β, γ, δ*** με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι ***α=3β*** και ***δ=5γ*** (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$ (Μονάδες 15)



α) Είναι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \alpha=3\beta \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow \delta=5\gamma$$

β) Για $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ η παράσταση Π γράφεται:

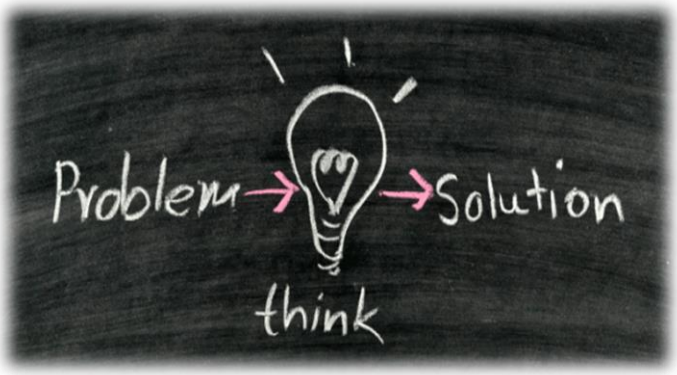
$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{\beta 5\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$$

1252

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του *y* ισχύει : $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

β) Αν *x, y* είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου *Π* είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow 2<y<4$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $\Pi = 2x+2y$. Είναι:

$$1<x<3 \Leftrightarrow 1\cdot 2<2x<2\cdot 3 \Leftrightarrow 2<2x<6 \quad (1)$$

$$2<y<4 \Leftrightarrow 2\cdot 2<2y<2\cdot 4 \Leftrightarrow 4<2y<8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$2+4<2x+2y<6+8 \Leftrightarrow 6<\Pi<14$$

1253

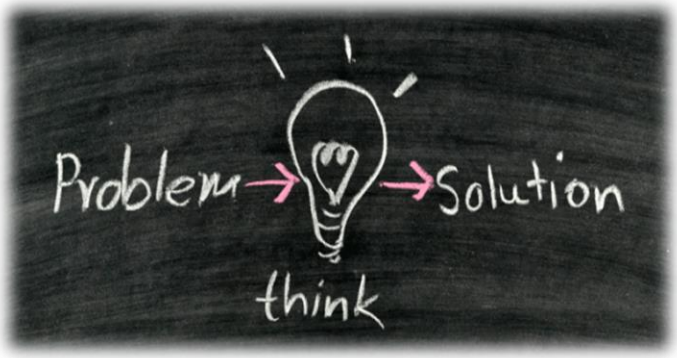
ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$. (Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός ***α*** επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$$

(Μονάδες 15)



α) Είναι:

$$|x-5|<4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4<x-5<4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4+5<x-5+5<4+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<x<9 \Leftrightarrow x\in(1,9)$$

β) Αφού τυχαίος αριθμός α επαληθεύει την ανίσωση του ερωτήματος (α) ισχύει ότι:

$$\alpha\in(1,9) \Leftrightarrow 1<\alpha<9 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 1>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$$

1254

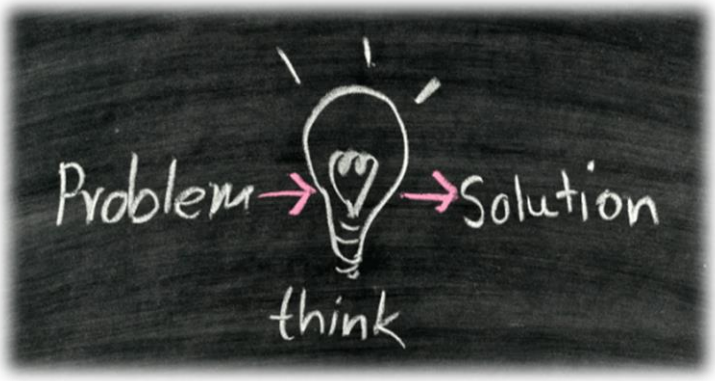
ΘΕΜΑ 2

Έστω *x, y* πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: *y=2x*. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης;

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$ (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2(x-4y) \Leftrightarrow 4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 6x=3y \Leftrightarrow y=2x$$

β) Για $y=2x$ η παράσταση A γράφεται:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x}=\frac{2x^2+3\cdot 4x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$$

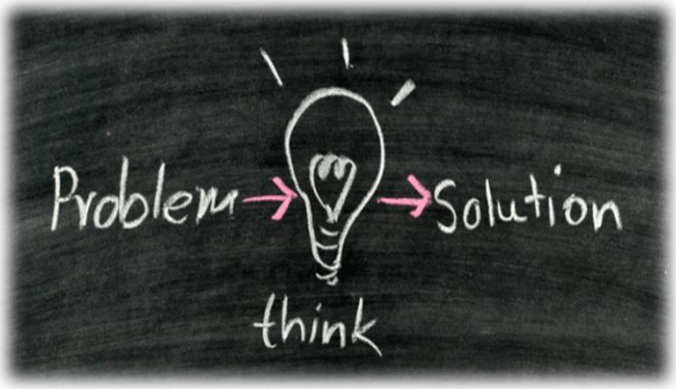
1255

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f*. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: *f(2)+f(4)=0*. (Μονάδες 10)



α) Το τριώνυμο x^2-x-6 έχει $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=-6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{1+5}{2}=3\\ \frac{1-5}{2}=-2\end{cases}$$

Πρέπει:

$$x^2-x-6\neq 0\Leftrightarrow (x\neq -2 \text{ και } x\neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{-2,3\}$.

β) Είναι:

$$f(2)=\frac{2+2}{2^2-2-6}=\frac{4}{4-2-6}=\frac{4}{-4}=-1 \text{ και}$$

$$f(4)=\frac{4+2}{4^2-4-6}=\frac{6}{16-4-6}=\frac{6}{6}=1$$

Άρα:

$$f(2)+f(4)=-1+1=0$$

1256

ΘΕΜΑ 2

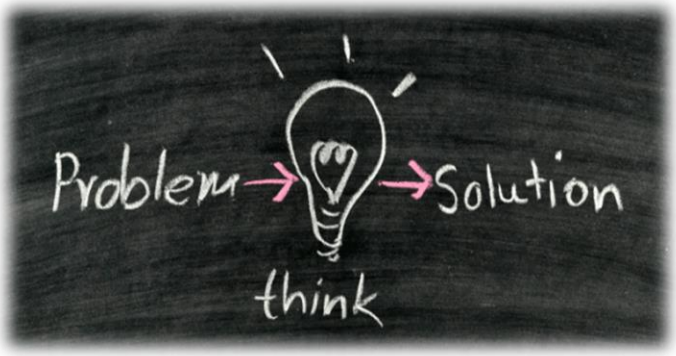
Οι αριθμοί *Α=1*, *Β=x+4*, *Γ=x+8* είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε τη τιμή του *x*. (Μονάδες 10)

β) Αν *x=1* και ο αριθμός *Α* είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά *ω*. (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)



α) Οι αριθμοί Α, Β, Γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$B = \frac{A+\Gamma}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{1+x+8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x+4) = 9 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 8 = x + 9 \Leftrightarrow x = 1$$

β) i) Για $x = 1$ είναι $A = 1$, $B = 5$ και $\Gamma = 9$. Τότε:

$$\omega = B - A = 5 - 1 = 4$$

ii) Είναι:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{20} = 1 + 19 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{20} = 1 + 76 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 77$$

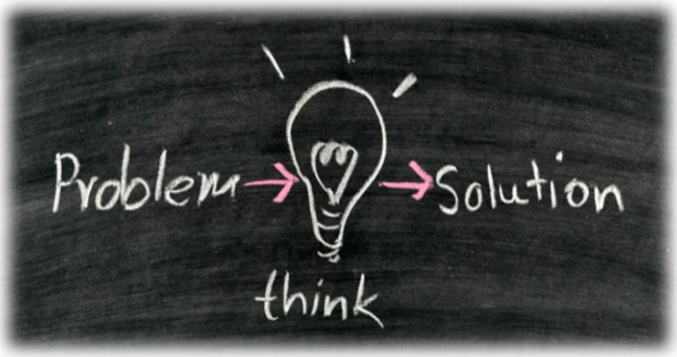
1257

ΘΕΜΑ 2

α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)



α) Οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x = \frac{4-x+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

β) Οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 = (4 - x) \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 \\ \frac{-2-6}{2} = -4 \end{cases}$$

Από τα σκέλη (α) και (β) βρίσκουμε $x = 2$.

1258

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

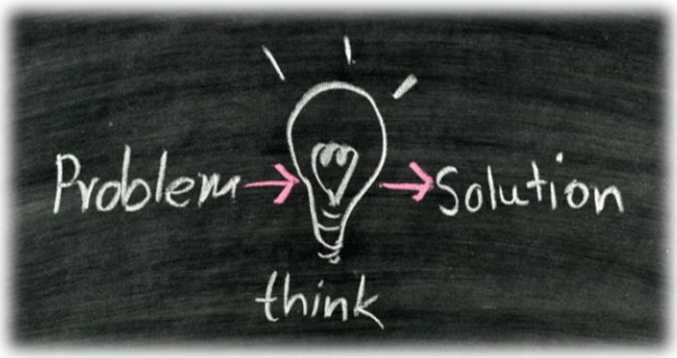
α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)



α) Ισχύει ότι:

$$5 < x < 10 \Leftrightarrow (5 < x \text{ και } x < 10) \Leftrightarrow (0 < x-5 \text{ και } x-10 < 0)$$

Τότε:

$$|x-5| = x-5 \text{ και } |x-10| = -(x-10)$$

β) Είναι:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1 + (-1) = 0$$

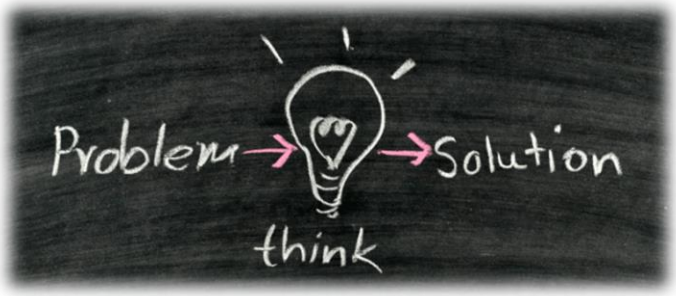
1259

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M(a,\frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)



α) Πρέπει:

$$x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1\neq 0 \text{ και } x+1\neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x\neq 1 \text{ και } x\neq -1)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

β) Το σημείο $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν:

$$f(\alpha)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2-1}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2-1=8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2-9=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-3)(\alpha+3)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-3=0 \text{ ή } \alpha+3=0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha=3 \text{ ή } \alpha=-3)$$

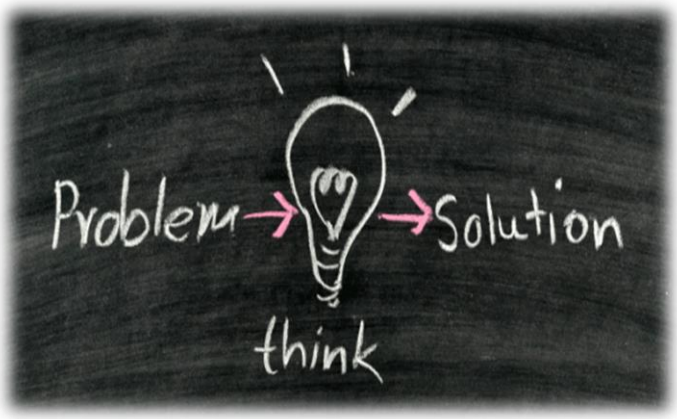
1260

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)



α) Ισχύει ότι:

$$1<x<2 \Leftrightarrow (1<x \text{ και } x<2) \Leftrightarrow (0<x-1 \text{ και } x-2<0)$$

Τότε:

$$|x-1|=x-1 \text{ και } |x-2|=-(x-2)=2-x$$

Άρα:

$$A=|x-1|-|x-2|=x-1-(2-x)=x-1-2+x=2x-3$$

β) Για $x<1$ είναι:

$$|x-1|=-(x-1)=1-x \text{ και } |x-2|=-(x-2)=2-x$$

Επομένως:

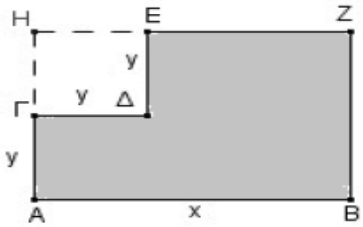
$$A=|x-1|-|x-2|=1-x-(2-x)=1-x-2+x=-1, \text{ σταθερή}$$

1261

ΘΕΜΑ 2

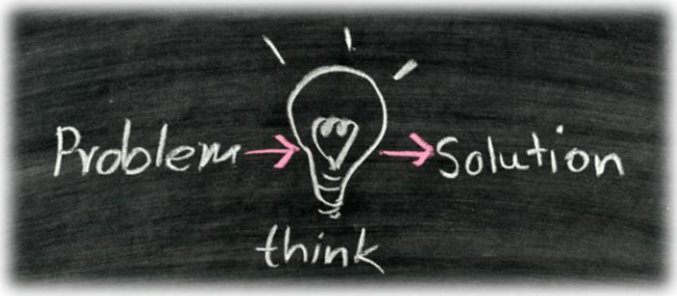
Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)



α) Η περίπετρος του ΕΖΒΑΓΔ είναι:

$$\Pi = AB + BZ + ZE + E\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma A =$$
$$= x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y$$

β) Είναι:

$$5 < x < 8 \Leftrightarrow 2\cdot 5 < 2x < 2\cdot 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16 \quad (1)$$
$$1 < y < 2 \Leftrightarrow 4\cdot 1 < 4y < 4\cdot 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$$

1262

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$

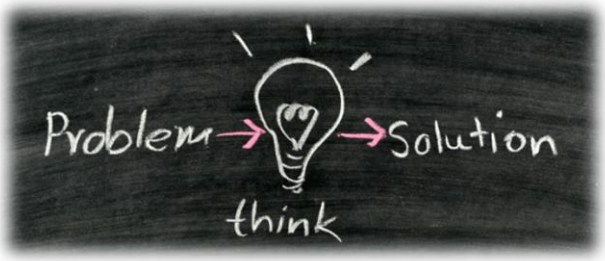
α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B=\frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)



α) i) Είναι:

$$A+B=\frac{1}{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{5-\sqrt{5}}==$$
$$=\frac{5-\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}+\frac{5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=$$
$$=\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=$$
$$=\frac{10}{5^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{10}{25-5}=$$
$$=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

ii) Ισχύει ότι:

$$A\cdot B=\frac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{5-\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=\frac{1}{5^2-(\sqrt{5})^2}=$$
$$=\frac{1}{25-5}=\frac{1}{20}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2-Sx+P=0$$

με

$$S=A+B=\frac{1}{2} \text{ και } P=A\cdot B=\frac{1}{20}$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}=0 \Leftrightarrow 20x^2-10x+1=0$$

1263

ΘΕΜΑ 2

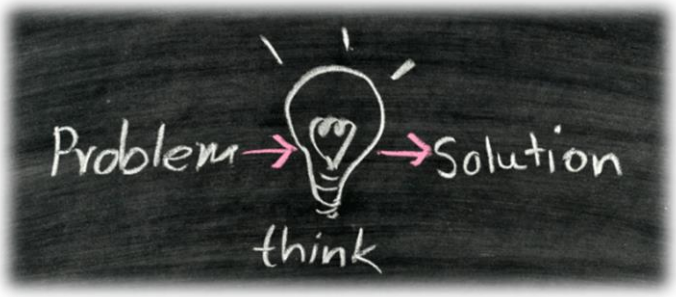
Η απόσταση ***y (σε χιλιόμετρα)*** ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από ***x λεπτά***, δίνεται από τη σχέση: ***y=35+0,8x***

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)



α) Για να βρούμε την απόσταση του αυτοκινήτου μετά από 25 λεπτά θέτουμε στη δοθείσα σχέση x = 25 και βρίσκουμε:

$$y = 35 + 0{,}8 \cdot 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 35 + 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 55 \text{ χιλιόμετρα}$$

β) Για να βρούμε τα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α θέτουμε στη δοθείσα σχέση y = 75 και βρίσκουμε:

$$75 = 35 + 0{,}8x \Leftrightarrow 40 = 0{,}8x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ λεπτά}$$

1264

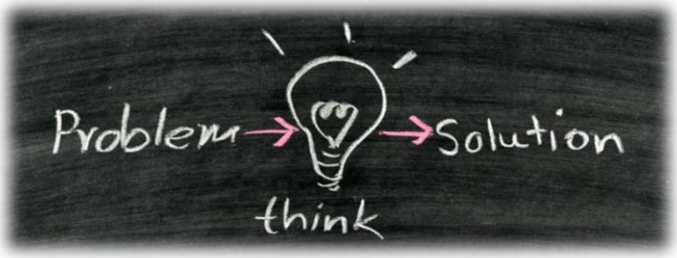
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ.

(Μονάδες 12)

β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)



α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-5}{2} \qquad (2)$$

Αφού η μία ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός 1, από την ισότητα (2) βρίσκουμε:

$$1 \cdot x_2 = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$1 + \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{\lambda}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{5}{2} = -\frac{\lambda}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-5}{2} = -\frac{\lambda}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\lambda}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 3$$

β) Για $\lambda = 3$ το τριώνυμο γράφεται $2x^2 + 3x - 5$

Το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$ έχει ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{2}$. Τότε:

$$2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)(x-1) = (2x+5)(x-1)$$

1265

ΘΕΜΑ 2

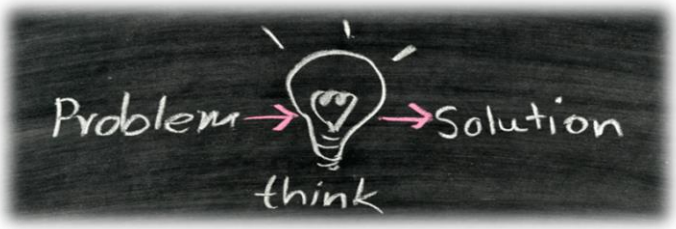
Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)



α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\beta)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2\beta^2 = 25\beta^2 - 16\beta^2 = 9\beta^2 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5\beta) \pm \sqrt{9\beta^2}}{2 \cdot 2} = \frac{5\beta \pm 3\beta}{4} = \begin{cases} \frac{5\beta + 3\beta}{4} = 2\beta \\ \frac{5\beta - 3\beta}{4} = \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Σημείωση: Μια εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1 = 2\beta$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$2(2\beta)^2 - 5\beta(2\beta) + 2\beta^2 = 8\beta^2 - 10\beta^2 + 2\beta^2 = 0$$

Ομοίως η $x_2 = \frac{\beta}{2}$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - 5\beta\left(\frac{\beta}{2}\right) + 2\beta^2 = 2\frac{\beta^2}{4} - 5\frac{\beta^2}{2} + 2\beta^2 = \frac{\beta^2}{2} - \frac{5\beta^2}{2} + 2\beta^2 = \frac{-4\beta^2}{2} + 2\beta^2 = 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες της x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$.

β) Οι αριθμοί 2β, β, $\frac{\beta}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, διότι

$\frac{\beta}{2\beta} = \frac{1}{2}$ και $\frac{\frac{\beta}{2}}{\beta} = \frac{\beta}{2\beta} = \frac{1}{2}$, δηλαδή ο λόγος των όρων με τη σειρά που δίνονται είναι σταθερός $\lambda = \frac{1}{2}$

1266

ΘΕΜΑ 2

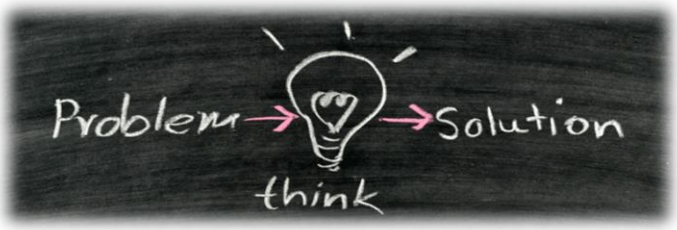
Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)



α) Το τριώνυμο $x^2-2\beta x+\beta^2-4$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2\beta)^2-4\cdot1\cdot(\beta^2-4)=4\beta^2-4\beta^2+16=16>0$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2\beta)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{2\beta\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{2\beta+4}{2}=\beta+2\\ \frac{2\beta-4}{2}=\beta-2\end{cases}$$

Σημείωση: Μια εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1=\beta+2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta+2)^2-2\beta(\beta+2)+\beta^2-4=\beta^2+4\beta+4-2\beta^2-4\beta+\beta^2-4=0$$

Ομοίως η $x_2=\beta-2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta-2)^2-2\beta(\beta-2)+\beta^2-4=\beta^2-4\beta+4-2\beta^2+4\beta+\beta^2-4=0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες της x_1, x_2 με $x_1\neq x_2$.

β) Οι αριθμοί $\beta-2$, β, $\beta+2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, διότι $\beta-(\beta-2)=2$ και $(\beta+2)-\beta=2$, δηλαδή διαφέρουν κατά σταθερό αριθμό $\omega=2$.

1268

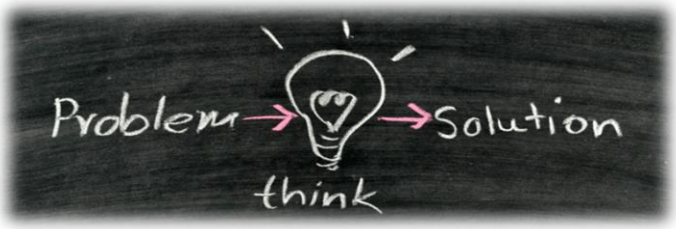
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη *x* και *y*, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\leq 2$ και $|y-6|\leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\leq x\leq 5$ και $2\leq y\leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις *2x* και *y*

(Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$|x-3|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x-3\leq 2 \Leftrightarrow -2+3\leq x-3+3\leq 2+3 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 5$$

$$|y-6|\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq y-6\leq 4 \Leftrightarrow -4+6\leq y-6+6\leq 4+6 \Leftrightarrow 2\leq y\leq 10$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y είναι $\Pi = 4x + 2y$.

Από το σκέλος (i) βρίσκουμε:

$$1\leq x\leq 5 \Leftrightarrow 1\cdot 4\leq 4x\leq 5\cdot 4 \Leftrightarrow 4\leq 4x\leq 20 \quad (1)$$

$$2\leq y\leq 10 \Leftrightarrow 2\cdot 2\leq 2y\leq 10\cdot 2 \Leftrightarrow 4\leq 2y\leq 20 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$4+4\leq 4x+2y\leq 20+20 \Leftrightarrow 8\leq \Pi\leq 40$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος είναι 8 και η μέγιστη η 40.

1269

ΘΕΜΑ 2

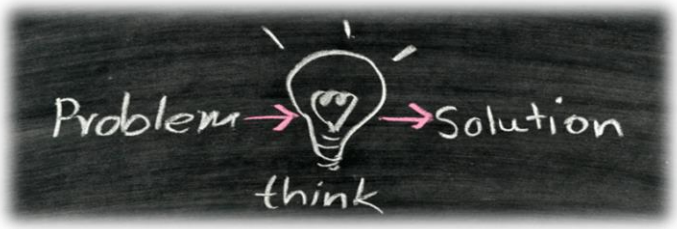
Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 10)



α) Για $\alpha = 2$, $\beta = 5$ και $\gamma = -1$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 πραγματικές και άνισες.

β) Με τη βοήθεια των τύπων Vieta βρίσκουμε:

- $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2}$
- $x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$

γ) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$x^2 - Sx + P = 0$

με

$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} S = 5$ και

$P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} P = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow P = -2$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$x^2 - 5x - 2 = 0$

1270

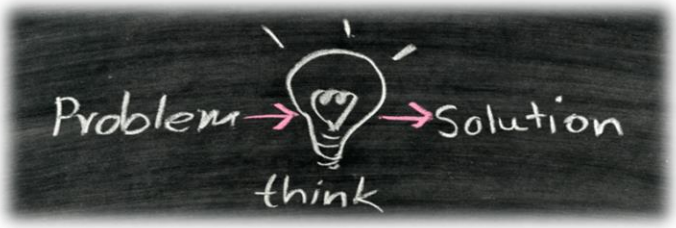
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το *x*, ώστε η παράσταση *K* να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν -2<x<3, να αποδείξετε ότι παράσταση *K* σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)



α)

$$K=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}-\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{|x-3|}{x-3}$$

Η παράσταση Κ έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x+2\neq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ \kappa\alpha\iota \\ x\neq 3 \end{cases}$$

β) Ισχύει: $-2<x<3$, οπότε $x+2>0$ και $x-3<0$.

Άρα $|x+2|=x+2$ και $|x-3|=-(x-3)$.

Οπότε: $K=\dfrac{|x+2|}{x+2}-\dfrac{|x-3|}{x-3}=\dfrac{x+2}{x+2}-\dfrac{-(x-3)}{x-3}=1+1=2$

1271

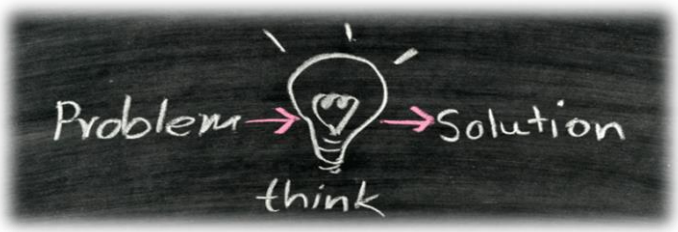
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ *(1)* *και* $x^2-16\leq 0$ *(2).*

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων *(1), (2).* (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων *(1)* και *(2)* πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)



α) • Το τριώνυμο $-x^2+5x-6$ έχει $\alpha=-1$, $\beta=5$, $\gamma=-6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot(-1)\cdot(-6)=25-24=1>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-1)}=\frac{-5\pm1}{-2}=\begin{cases}\frac{-5+1}{-2}=2\\ \frac{-5-1}{-2}=3\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2+5x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Επομένως ισχύει:

$$-x^2+5x-6<0 \Leftrightarrow (x<2 \text{ ή } x>3) \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$$

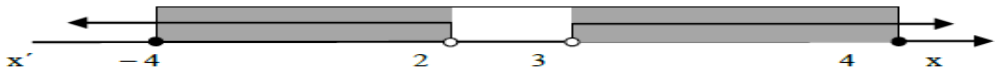
• Την ανίσωση $x^2-16\leq 0$ θα τη λύσουμε με συντομότερο τρόπο. Ισχύει ότι:

$$x^2-16\leq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2}\leq\sqrt{16} \Leftrightarrow |x|\leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\leq x\leq 4 \Leftrightarrow x\in[-4,4]$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-4\leq x<2 \text{ ή } 3<x\leq 4 \Leftrightarrow x\in[-4,2)\cup(3,4]$$

1272

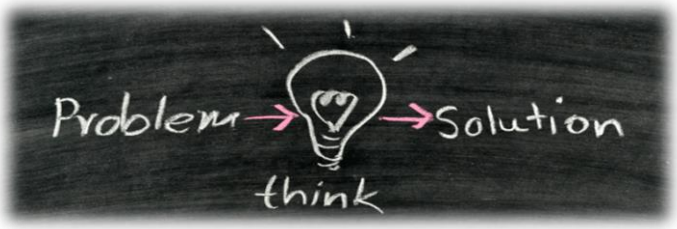
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός *x*, για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2)<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$. (Μονάδες 10)

β) $x^2+4x+3<0$. (Μονάδες 15)



α) Είναι:

$$d(x,-2)<1 \Leftrightarrow |x-(-2)|<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x+2|<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1<x+2<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1-2<x+2-2<1-2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3<x<-1$$

β) Από το σκέλος (α) ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x+2|<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x+2|^2<1^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+3<0$$

1273

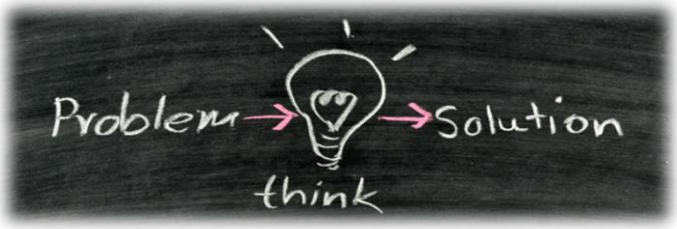
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$ (Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο (Μονάδες 13)



α) Το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$ έχει $\alpha=-1$, $\beta=\sqrt{3}-1$, $\gamma=\sqrt{3}$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(\sqrt{3}-1\right)^2-4\cdot(-1)\cdot\sqrt{3}=$$

$$=\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1^2+4\sqrt{3}=$$

$$=\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1^2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2>0$$

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\cdot(-1)}=\frac{1-\sqrt{3}\pm(\sqrt{3}+1)}{-2}=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}{-2}=-1\\ \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}{-2}=\sqrt{3}\end{cases}$$

Επομένως:

$$-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}=-(x-(-1))(x-\sqrt{3})=-(x+1)(x-\sqrt{3})$$

1275

ΘΕΜΑ 2

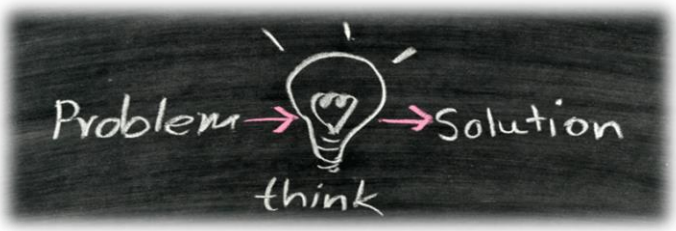
α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3 (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. (Μονάδες 8)



i) Το τριώνυμο x^2+2x-3 έχει $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{2}=1\\ \frac{-2-4}{2}=-3\end{cases}$$

Τότε:

$$x^2+2x-3=1\cdot(x-1)(x-(-3))=(x-1)(x+3)$$

ii) Πρέπει:

$$x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{1\}$.

Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3$$

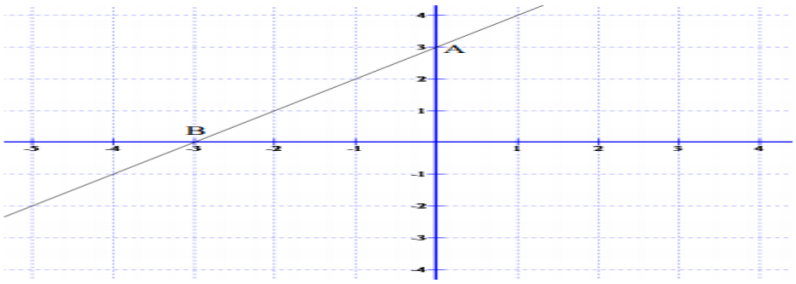
Αντικαθιστούμε στον τύπο της f όπου $x=0$ και βρίσκουμε: $f(0)=0+3=3$.

Άρα ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η C_f είναι το $A(0,3)$

Αντικαθιστούμε στον τύπο της f όπου $y=0$ και βρίσκουμε: $0=x+3\Leftrightarrow x=-3$.

Άρα ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η C_f είναι το $B(-3,0)$.

Η γραφική παράσταση της f είναι η:



1277

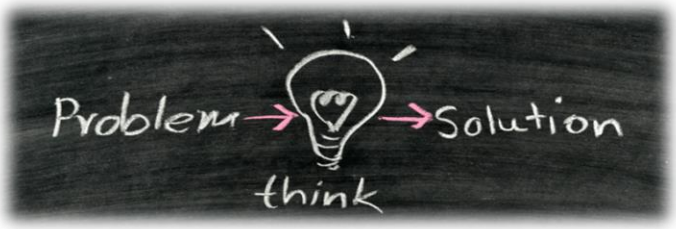
ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$ (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση: $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11x-24$ (Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$. (Μονάδες 5)



α) Το τριώνυμο $x^2-10x+21$ έχει $\alpha=1$, $\beta=-10$, $\gamma=21$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-10)^2-4\cdot1\cdot21=100-84=16>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{10\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{10+4}{2}=7\\ \frac{10-4}{2}=3\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2-10x+21$		+	0	−	0	+	

Επομένως ισχύει:

$$x^2-10x+21<0\Leftrightarrow 3<x<7\Leftrightarrow x\in(3,7)$$

β) i) Για $3<x<7$ είναι $x-3>0$, οπότε:

$$|x-3|=x-3$$

και από το σκέλος (α) ισχύει $x^2-10x+21<0$, οπότε:

$$|x^2-10x+21|=-(x^2-10x+21)=-x^2+10x-21$$

Τότε η παράσταση Α γράφεται:

$$A=x-3-x^2+10x-21=-x^2+11x-24$$

ii) Είναι:

$$A=6\Leftrightarrow -x^2+11x-24=6\Leftrightarrow x^2-11x+30=0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-11)^2-4\cdot1\cdot30=121-120=1>0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{11\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{11+1}{2}=6\\ \frac{11-1}{2}=5\end{cases}$$

Οι ρίζες $x=5$, $x=6$ είναι και οι δύο δεκτές διότι ανήκουν στο διάστημα $(3, 7)$.

1278

ΘΕΜΑ 2

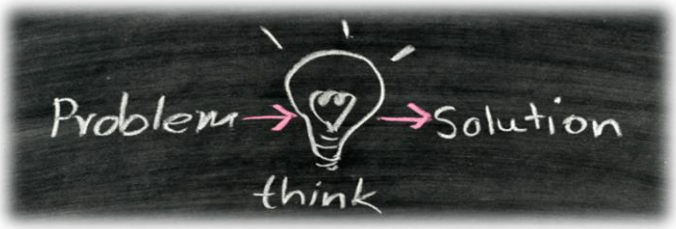
Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου (°C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T=15+25\cdot x, \quad \text{όταν } 0\leq x\leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



α) Για να βρούμε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης θέτουμε στη δοθείσα σχέση x = 30 και βρίσκουμε ισοδύναμα:

$$T = 15 + 25 \cdot 30$$
$$T = 15 + 750$$
$$T = 765\ ^{o}C$$

β) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι ίση με 290 ^{o}C θέτουμε στη δοθείσα σχέση T = 290 και βρίσκουμε ισοδύναμα:

$$290 = 15 + 25 \cdot x$$
$$275 = 25x$$
$$x = 11 \text{ χιλιόμετρα}$$

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440 ^{o}C λύνουμε την ανίσωση:

$$T > 440 \quad \Leftrightarrow$$
$$15 + 25 \cdot x > 440 \quad \Leftrightarrow$$
$$25 \cdot x > 425 \quad \Leftrightarrow$$
$$x > 17 \text{ χιλιόμετρα}$$

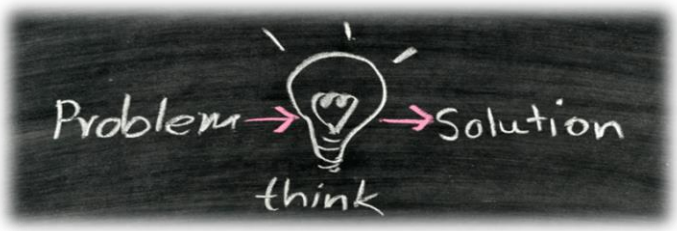
Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη των 440 ^{o}C σε βάθος άνω των 17 χιλιομέτρων.

1279

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2-4x+1 \le 0$. (Μονάδες 12)

β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)



α) Το τριώνυμο $3x^2-4x+1$ έχει $\alpha=3, \beta=-4, \gamma=1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 1=16-12=4>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 3}=\frac{4\pm 2}{6}=\begin{cases}\dfrac{4+2}{6}=1\\ \dfrac{4-2}{6}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$3x^2-4x+1\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{3},1\right]$$

β) Αφού οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης ισχύει ότι:

$$\alpha\in\left[\frac{1}{3},1\right]\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\alpha\le 1 \text{ και}$$

$$\beta\in\left[\frac{1}{3},1\right]\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\beta\le 1$$

Τότε:

$$\frac{1}{3}\le\alpha\le 1\Leftrightarrow 1\le 3\alpha\le 3 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{3}\le\beta\le 1\Leftrightarrow 2\le 6\beta\le 6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1+2\le 3\alpha+6\beta\le 3+6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\le 3\alpha+6\beta\le 9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{9}\le\frac{3\alpha+6\beta}{9}\le\frac{9}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\frac{3\alpha+6\beta}{9}\le 1$$

Άρα και ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι λύση της ανίσωσης.

1280

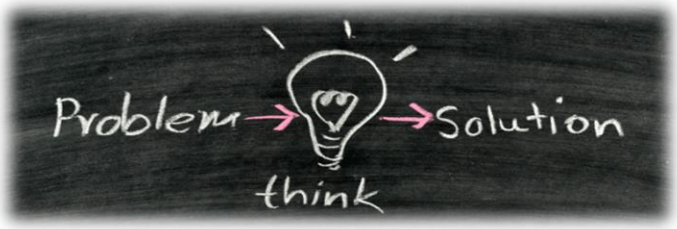
ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)



α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta) = -30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta \cdot 2 = -30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta = -15$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad P = \alpha\beta = -15$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 15$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{2+8}{2} = 5 \\ \frac{2-8}{2} = -3 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha = 5 \ \text{και} \ \beta = -3) \ \text{ή} \ (\alpha = -3 \ \text{και} \ \beta = 5)$$

1281

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\sqrt{2}\right)^6, \qquad B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6, \qquad \Gamma = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6 \quad .$$

α) Να δείξετε ότι:

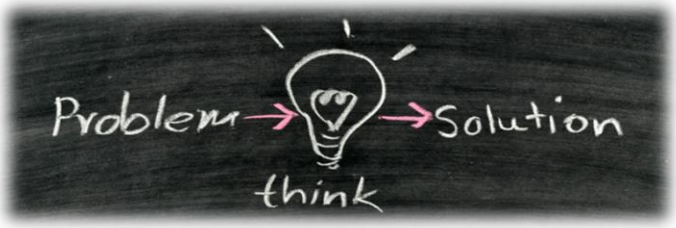
$$A + B + \Gamma = 23 \ .$$

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3} \quad \text{και} \quad \sqrt[6]{6} \quad .$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



α) Είναι:

$$A + B + \Gamma = \left(\sqrt{2}\right)^6 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{6}\right)^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 + \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6 =$$

$$= 2^{\frac{6}{2}} + 3^{\frac{6}{3}} + 6^{\frac{6}{6}} = 2^3 + 3^2 + 6 = 8 + 9 + 6 = 23$$

β) Είναι: $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{9}$. Τότε:

$$6 < 9 \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$$

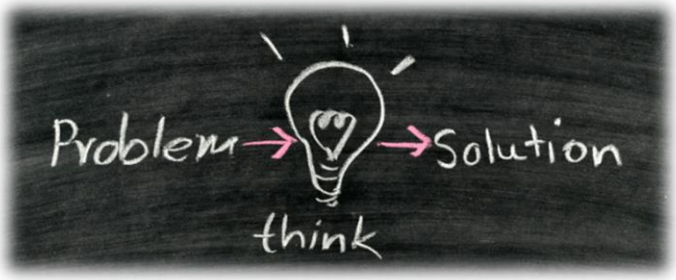
1282

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=5$. (Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$\alpha_4 - \alpha_2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (4-1)\omega - [\alpha_1 + (2-1)\omega] = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - \omega = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_1 + (2-1)5 + \alpha_1 + (3-1)5 = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha_1 + 5 + 10 = 33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha_1 = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$$

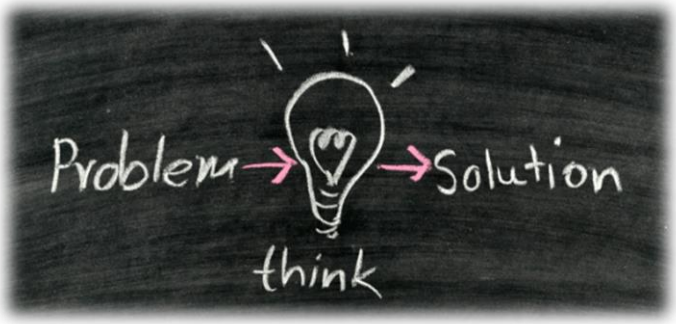
1283

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} 8-x & \text{αν } x<0 \\ 2x+5 & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=9$. (Μονάδες 12)



α) Είναι:

$$f(-5)=8-(-5)=8+5=13 \quad \text{και}$$
$$f(4)=2\cdot 4+5=8+5=13$$

Άρα $f(-5)=f(4)$.

β) • Για $x<0$ είναι:

$$f(x)=9 \Leftrightarrow 8-x=9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x=1 \Leftrightarrow x=-1$$

• Για $x\geq 0$ είναι:

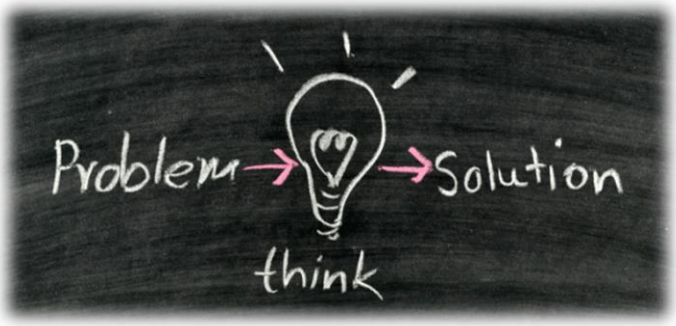
$$f(x)=9 \Leftrightarrow 2x+5=9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$$

1284

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A=||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$|x+4|\geq 3 \quad \text{αν και μόνο αν}$$

$$x+4\leq -3 \text{ ή } x+4\geq 3 \quad \text{αν και μόνο αν}$$

$$x\leq -7 \text{ ή } x\geq -1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha\geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+4\geq -1+4 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+4\geq 3, \text{ δηλαδή } \alpha+4>0$$

Άρα, $|\alpha+4|=\alpha+4$. Τότε η παράσταση Α γράφεται:

$$A=||\alpha+4|-3|=|\alpha+4-3|=|\alpha+1|=\alpha+1, \text{ αφού } \alpha\geq -1$$

1285

ΘΕΜΑ 2

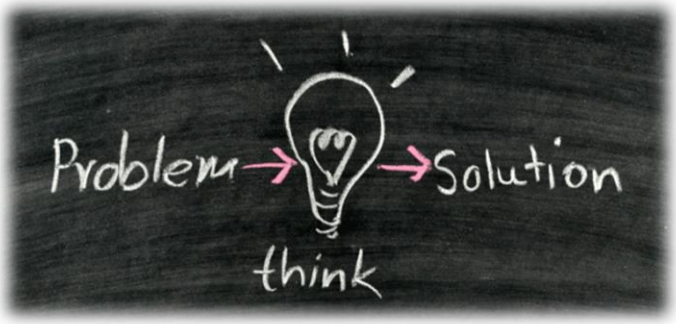
Το πάτωμα του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις *(x+1)*μέτρα και *x* μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του *x* την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)



α) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι:

$\Pi = 2(x+1) + 2x = 4x + 2, \quad \text{με } x > 0$

και το εμβαδόν του Ε είναι:

$E = x(x+1) = x^2 + x, \quad \text{με } x > 0$

β) Ισχύει ότι:

$E = 90$ αν και μόνο αν

$x^2 + x = 90$ αν και μόνο αν

$x^2 + x - 90 = 0$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 90$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -90$ και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361 > 0$

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 90 = 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{-1+19}{2} = 9 \\ \frac{-1-19}{2} = -10, \text{ απορρίπτεται } (x > 0) \end{cases}$$

Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι:

$x = 9$ μέτρα και

$x + 1 = 10$ μέτρα.

1287

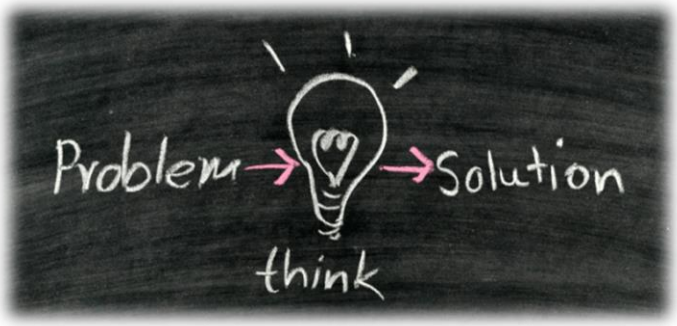
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



α) Έχουμε:

$$K \geq \Lambda \Leftrightarrow$$
$$K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha^2 + \alpha^2) + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Άρα $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

β) Ισχύει
$$K = \Lambda \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 = 0 \text{ και } (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha = 0 \text{ και } \alpha = \beta$$

Τελικά $K = \Lambda$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta = 0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

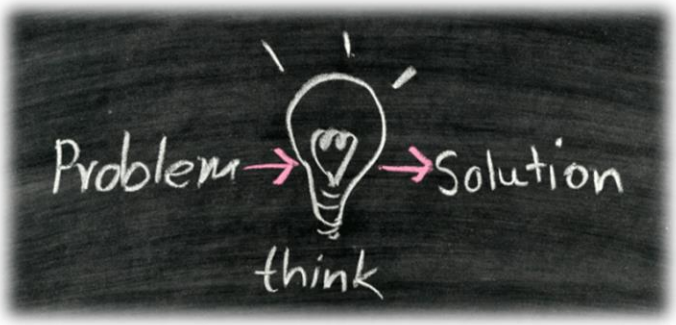
i) να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

(Μονάδες 6)

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου

$\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.

(Μονάδες 9)



α) Το τριώνυμο $x^2 - \kappa x - 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\kappa$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-\kappa)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = \kappa^2 + 8 > 0, \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}$$

β)

i) Είναι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\kappa}{1} = \kappa \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-2}{1} = -2$$

ii) Το άθροισμα των ριζών ρ_1, ρ_2 είναι:

$$\rho_1 + \rho_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\kappa$$

και το γινόμενο:

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2 = 4 \cdot (-2) = -8$$

Επομένως η εξίσωση που έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2 είναι:

$$x^2 - 2\kappa x - 8 = 0$$

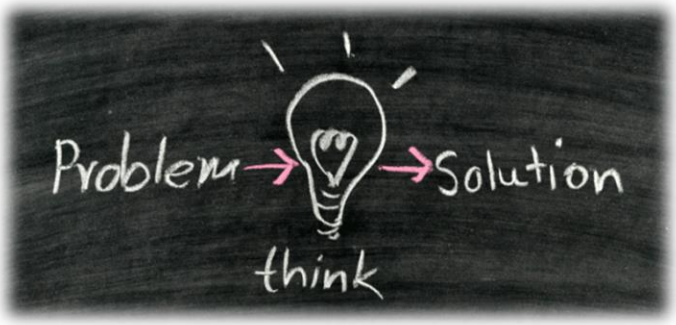
1290

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το *1*,να βρείτε το λ. (Μονάδες 13)

β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1) (Μονάδες 12)



α) Αφού η εξίσωση (1) έχει λύση το 1, ισχύει ότι:

$$1^2-(\lambda-1)1+6=0 \Leftrightarrow 1-\lambda+1+6=0 \Leftrightarrow 8-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=8$$

β) Για $\lambda=2$ η εξίσωση γράφεται:

$$x^2-(2-1)x+6=0 \Leftrightarrow x^2-x+6=0$$

Για $\alpha=1$, $\beta=-1$ και $\gamma=6$, βρίσκουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 6=1-24=-23<0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

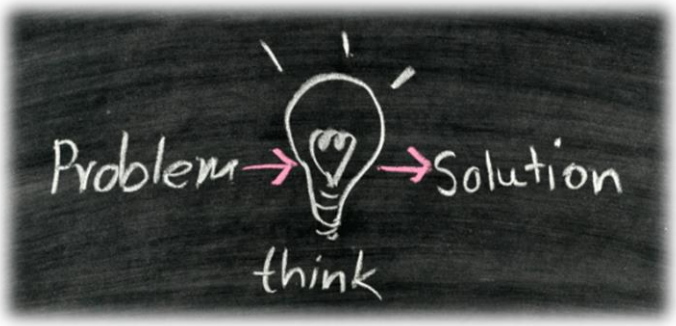
1291

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

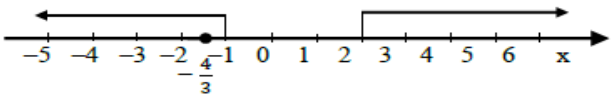
β) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

γ)



Το $-\frac{4}{3}$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

1292

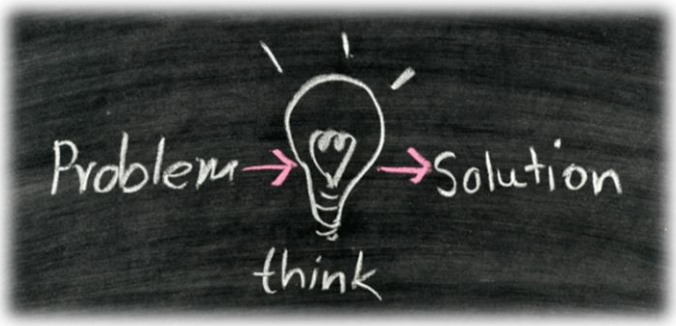
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1=1$ και $\alpha_3=9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu>30$.

(Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$\alpha_3 = 9 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1 + (3-1)\omega = 9 \Leftrightarrow$$
$$1 + 2\omega = 9 \Leftrightarrow$$
$$2\omega = 8 \Leftrightarrow$$
$$\omega = 4$$

β) Ισχύει:

$$\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1 + (\nu-1)\omega > 30 \Leftrightarrow$$
$$1 + (\nu-1)4 > 30 \Leftrightarrow$$
$$1 + 4\nu - 4 > 30 \Leftrightarrow$$
$$4\nu > 33 \Leftrightarrow$$
$$\nu > \frac{33}{4}$$

Επομένως, ο μικρότερος θετικός ακέραιος ν ώστε $\alpha_\nu > 30$ είναι ο $\nu = 9$.

1294

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

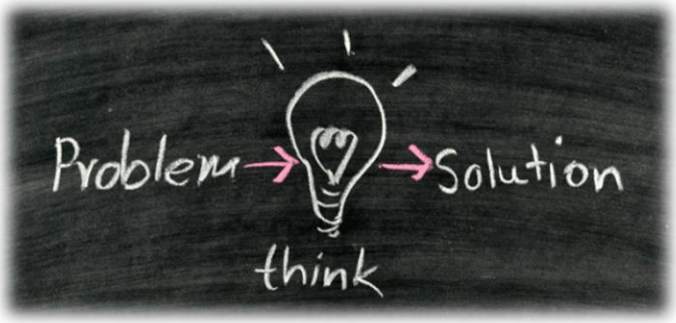
$$f(0)=5 \text{ και } f(1)=3.$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=5$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)



1294

α) Ισχύει ότι:

$$f(0) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 \quad (1)$$

και

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 5 = 3 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

β) Ο τύπος της f γράφεται: $f(x) = -2x + 5$.

Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

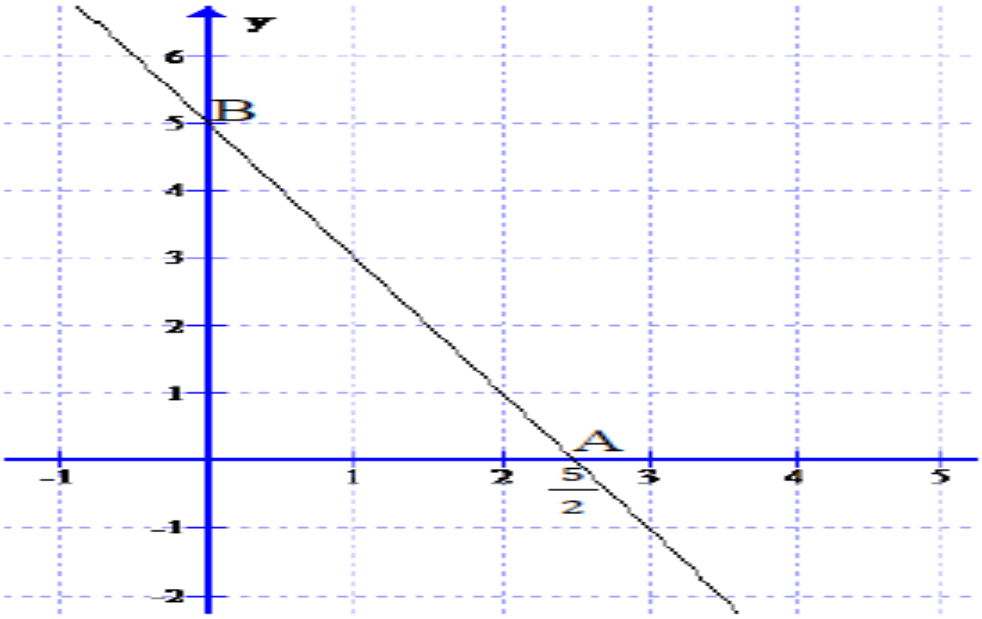
Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0 + 5 = 5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 5)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α, Β. Επομένως το γράφημα της είναι:



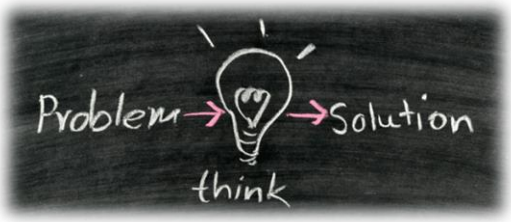
1295

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f* και να αποδείξετε ότι, για τα *x* που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του *x* για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$. (Μονάδες 10)



α) Πρέπει:

$$x-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4$$

Άρα το πεδίο ορισμού της *f* είναι το $A=\mathbb{R}-\{4\}$.

Ο τύπος της *f* μετά τις σχετικές παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις γράφεται:

$$f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}=\frac{x(x^2-16)}{x-4}=\frac{x(x-4)(x+4)}{x-4}=x(x+4)=x^2+4x$$

β) Είναι:

$$f(x)=32 \Leftrightarrow x^2+4x=32 \Leftrightarrow x^2+4x-32=0$$

Το τριώνυμο $x^2+4x-32$ έχει $\alpha=1$, $\beta=4$, $\gamma=-32$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot 1\cdot(-32)=16+128=144>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 12}{2}=\begin{cases}\dfrac{-4+12}{2}=4\\ \dfrac{-4-12}{2}=-8\end{cases}$$

Επειδή η f ορίζεται στο $A=R-\{4\}$ δεκτή είναι μόνο η τιμή $x=-8$.

1297

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x},\ x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$. (Μονάδες 15)

α) Είναι:

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$
- $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$
- $f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Τότε:

$$A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2) =$$
$$= \frac{5}{2} + 2 - \frac{3}{2} =$$
$$= \frac{2}{2} + 2 = 1 + 2 = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(x^2+1) = 5x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1298

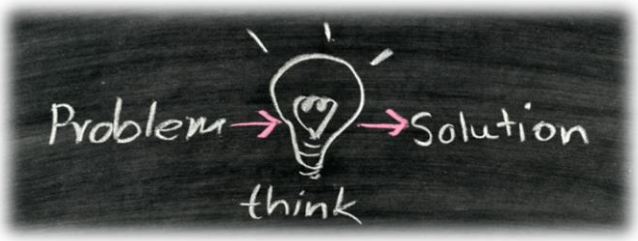
ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος *x* εκατοστά και πλάτος *y* εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη *x* και *y* ισχύει: $4 \le x \le 7$ και $2 \le y \le 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το *x* μειωθεί κατά 1 και το *y* τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)



α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2x + 2y$. Τότε:

$$4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 2\cdot 4 \le 2x \le 2\cdot 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14 \ (1) \quad \text{και}$$

$$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 2\cdot 2 \le 2y \le 2\cdot 3 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 6 \ (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$8 + 4 \le 2x + 2y \le 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \le \Pi \le 20$$

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$$P = 2(x-1) + 2\cdot 3y = 2x + 6y - 2$$

Τότε:

$$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 6\cdot 2 \le 6y \le 6\cdot 3 \Leftrightarrow 12 \le 6y \le 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \le 6y - 2 \le 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \le 6y - 2 \le 16 \ (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$$8 + 10 \le 2x + 6y - 2 \le 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \le P \le 30$$

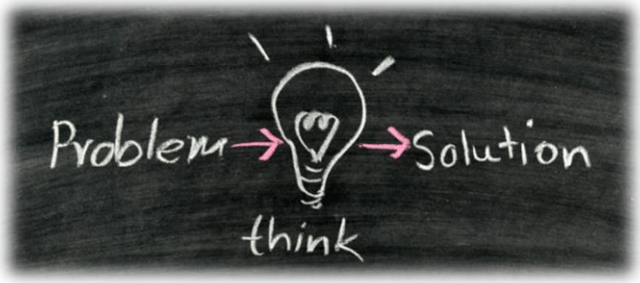
1299

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3.$$ (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το Α(1, 3). (Μονάδες 12)



α) Είναι:

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3 =$$
$$= x^2(x-1) + 3(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2+3)$$

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = R^*$ και η g το $B = R$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 = x(x^2 - x + 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 = x^3 - x^2 + 3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 + 3 = 0, \text{ αδύνατη}) \Leftrightarrow x = 1$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 3$. Άρα το σημείο τομής των C_f, C_g είναι το Α(1, 3).

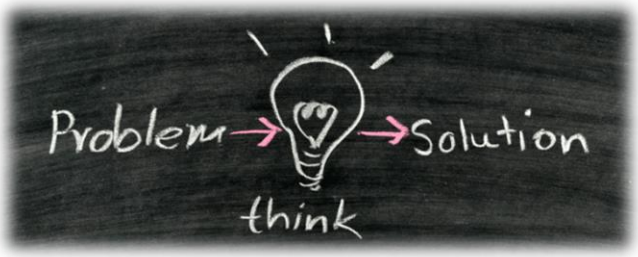
1300

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B=\left|x^2+4x+5\right|-\left|x^2+4x+4\right|$$ (Μονάδες 15)



α) Το τριώνυμο x^2+4x+5 έχει $\alpha=1$, $\beta=4$, $\gamma=5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4<0$$

Επειδή $\alpha=1>0$, ισχύει ότι:

$$x^2+4x+5>0,$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Είναι $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq0$. Τότε:

$$B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow B=x^2+4x+5-(x^2+4x+4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B=x^2+4x+5-x^2-4x-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B=1$$

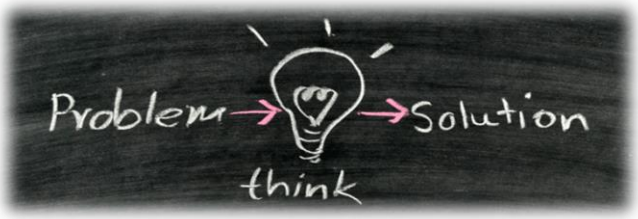
1301

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f, g* τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξτε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο. (Μονάδες 12)



α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και η g το $B=\mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y=f(x) \text{ και } y=g(x)$$

Είναι:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3=x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow x(x^2-1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x-1=0 \text{ ή } x+1=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1)$$

- Για $x=0$: $f(0)=0^3=0$
- Για $x=1$: $f(1)=1^3=1$
- Για $x=-1$: $f(-1)=(-1)^3=-1$

Τελικά τα σημεία τομής των C_f, C_g είναι τα:

$$O(0,0),\ A(1,1) \text{ και } B(-1,-1)$$

β) Ισχύει ότι:

$$x_A=-x_B \text{ και } y_A=-y_B$$

Άρα τα σημεία Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

1302

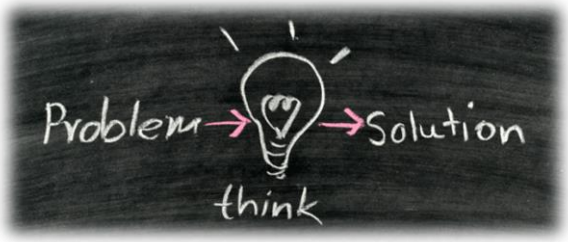
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in A$ (Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$. (Μονάδες 5)



1302

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in R$ με:

$$2|x| - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2|x| \neq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow (x \neq -3 \text{ και } x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{-3, 3\}$.

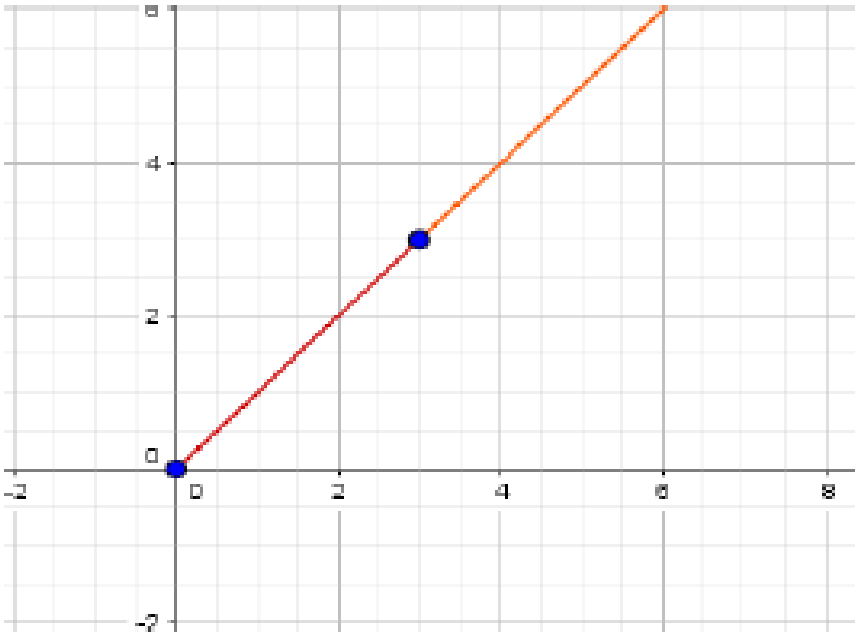
β) Ο τύπος της f μετά τις σχετικές παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις γράφεται:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6} =$$

$$= \frac{2|x|^2 - 6|x|}{2|x| - 6} =$$

$$= \frac{|x|(2|x| - 6)}{2|x| - 6} = |x|, \text{ για κάθε } x \in A$$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ για $x>0$, είναι η:



1303

ΘΕΜΑ 2

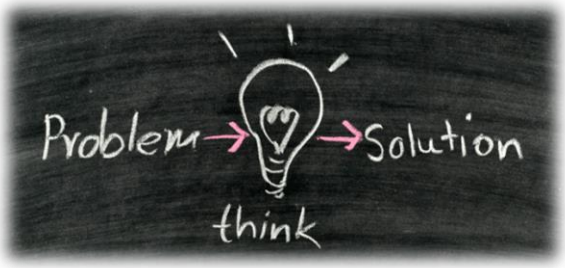
Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = |2x-4| \quad \text{και} \quad B = |x-3|, \quad \text{όπου ο } x \text{ είναι πραγματικός αριθμός.}$$

α) Για κάθε $2 \le x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



α) Είναι:

$$2 \le x < 3 \Leftrightarrow (2 \le x \text{ και } x < 3) \Leftrightarrow (4 \le 2x \text{ και } x - 3 < 0) \Leftrightarrow (0 \le 2x - 4 \text{ και } x - 3 < 0)$$

Τότε:

$$A = |2x - 4| = 2x - 4 \quad \text{και} \quad B = |x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$$

Άρα:

$$A + B = 2x - 4 + 3 - x = x - 1$$

β) Είναι:

$$A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3,$$

αδύνατο διότι $x \in [2, 3)$. Επομένως δεν υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε $A + B = 2$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

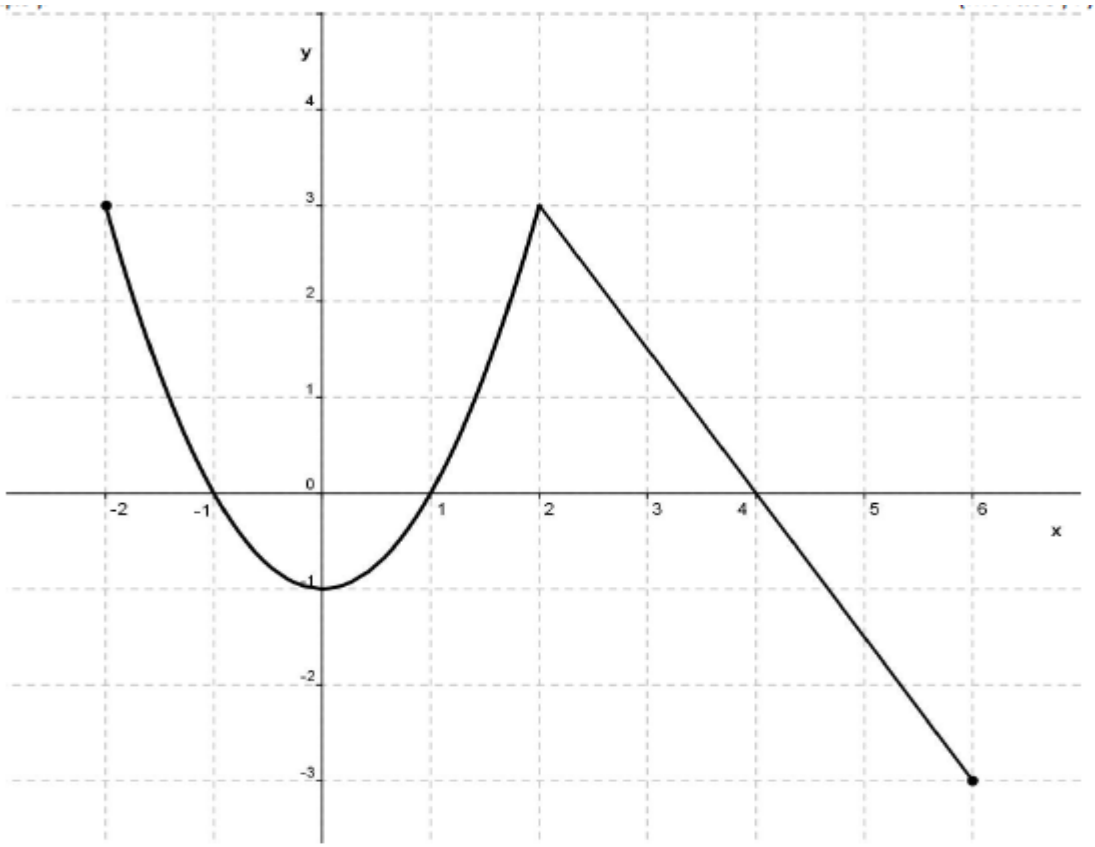
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

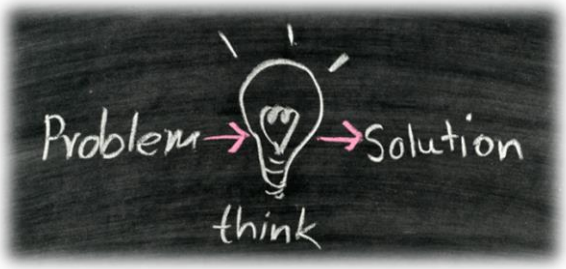
x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. (Μονάδες 7)



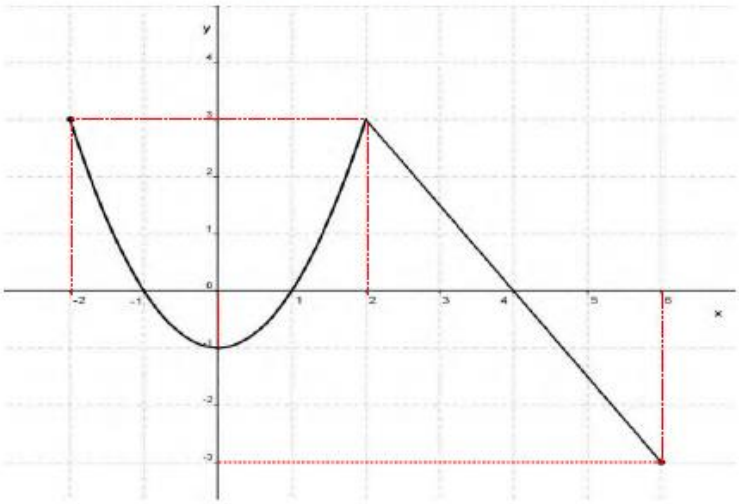


1304

α) Προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της f στον άξονα x΄x και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το:

$$A = [-2, 6]$$

β) Από τη γραφική παράσταση της f συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί:



x	– 2	– 1	0	1	2	6
y	3	0	– 1	0	3	– 3

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία:

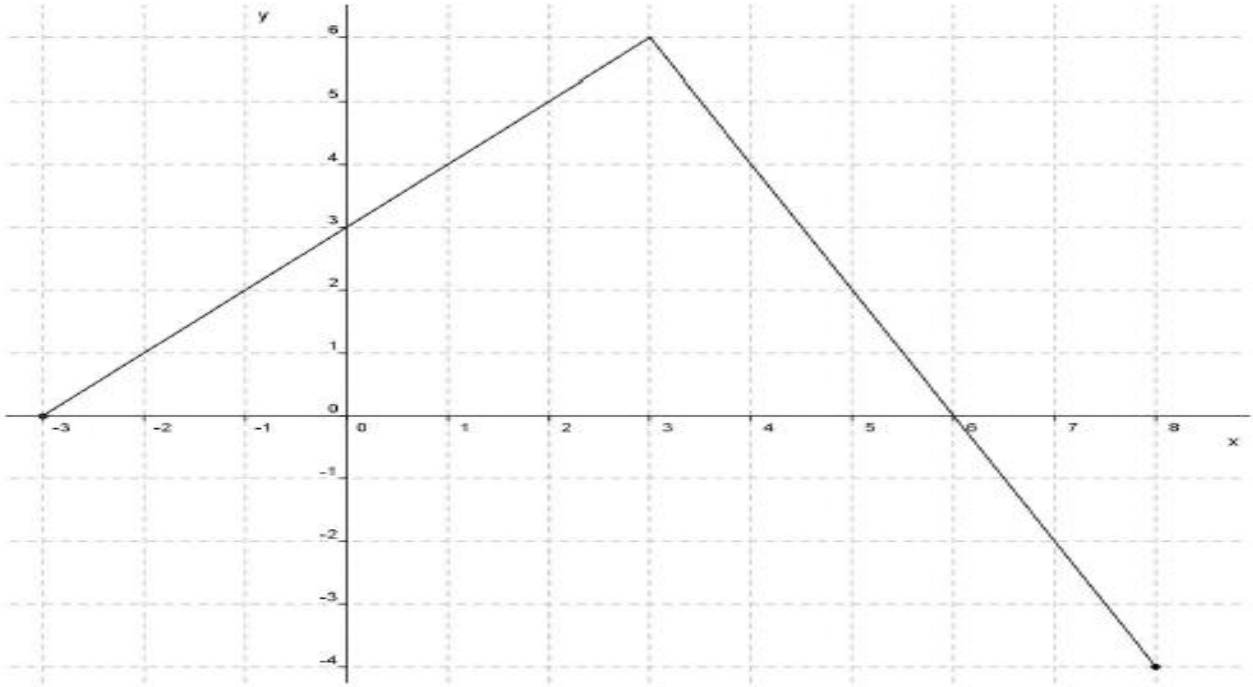
$$A(-1, 0),\ B(1, 0) \text{ και } \Gamma(4, 0)$$

και τον άξονα y΄y στο σημείο:

$$\Delta(0, -1)$$

δ) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές, δηλαδή αυτά για τα οποία βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα x΄x είναι τα $(-1, 1)$ και $(4, 6]$.

ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

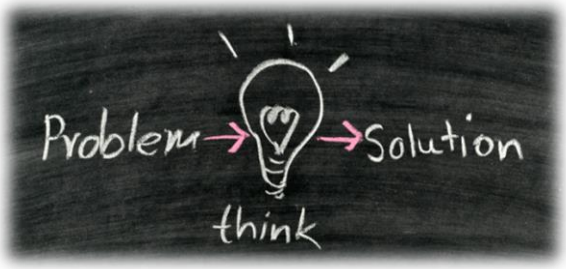
x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

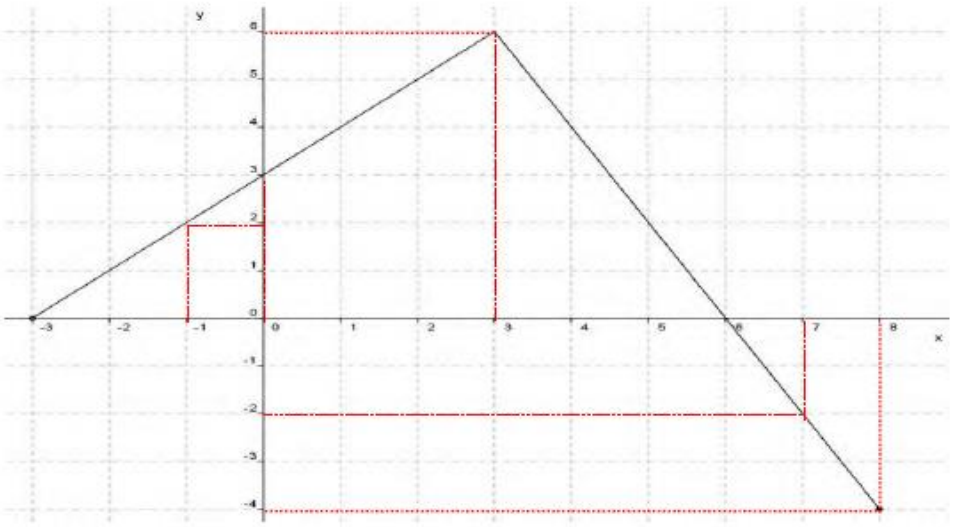


1305

α) Προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της f στον άξονα x΄x και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το:

$$A = [-3, 8]$$

β) Από τη γραφική παράσταση της f συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί:



x	– 3	– 1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	– 2	– 4

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία:

$$A(-3, 0) \text{ και } B(6, 0)$$

και τον άξονα y΄y στο σημείο:

$$\Gamma(0, 3)$$

δ) Το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές, δηλαδή αυτό για το οποίο βρίσκεται «πάνω» από τον άξονα x΄x είναι το (– 3, 6).

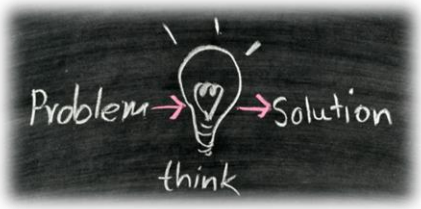
1306

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)= 3x^2 + 9x - 12, \quad x\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



α) Το τριώνυμο $3x^2 + 9x - 12$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = 9$, $\gamma = -12$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4\cdot 3\cdot(-12) = 81 + 144 = 225 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

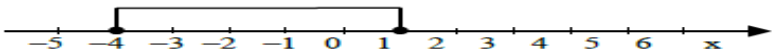
$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9\pm\sqrt{225}}{2\cdot 3} = \frac{-9\pm 15}{6} = \begin{cases} \frac{-9+15}{6} = 1 \\ \frac{-9-15}{6} = -4 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$3x^2 + 9x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$f(x) \le 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 12 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4 \le x \le 1 \Leftrightarrow x\in[-4, 1]$$



β) Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης αν και μόνο αν:

$$-4 \le \sqrt[3]{2} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \le 1^3 \Leftrightarrow 2 \le 1, \text{ άτοπο}$$

Άρα ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης

1307

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση *g*, με $g(x)=\dfrac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης *g* διέρχεται από το σημείο *A(1,- 4)*,

α) να δείξετε ότι $\mu=-6$. (Μονάδες 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) για $\mu=-6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$ αν και μόνο αν:

$$g(1)=-4 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 1^2-4\cdot 1+\mu}{1+1}=-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-4+\mu}{2}=-4 \Leftrightarrow -2+\mu=-8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu=-6$$

β) Η συνάρτηση ορίζεται για $x\in R$ με:

$$x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $A=R-\{-1\}$.

γ) Για $\mu=-6$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x)=\frac{2x^2-4x-6}{x+1}$$

Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $2x^2-4x-6$.

Το τριώνυμο $2x^2-4x-6$ έχει $\alpha=2$, $\beta=-4$, $\gamma=-6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot 2\cdot(-6)=16+48=64>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{64}}{2\times 2}=\frac{4\pm 8}{4}=\begin{cases}\frac{4+8}{4}=3\\ \frac{4-8}{4}=-1\end{cases}$$

Άρα:

$$2x^2-4x-6=2(x-3)(x-(-1))=2(x-3)(x+1)$$

Τότε, μετά από τις σχετικές πράξεις και απλοποιήσεις ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x)=\frac{2x^2-4x-6}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{2(x-3)(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x)=2(x-3)=2x-6, \text{ με } x\neq -1$$

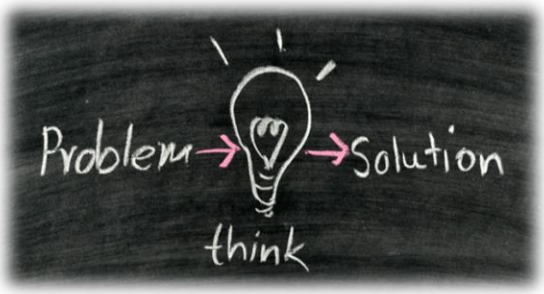
1308

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: ***A= 4***. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$. (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{5}\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{\sqrt{9}+\sqrt{25}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=$$
$$=\frac{3+5}{5-3}=\frac{8}{2}=4$$

β) Η εξίσωση γράφεται:

$$|x+A|=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x+4|=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+4=1 \text{ ή } x+4=-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x=-3 \text{ ή } x=-5)$$

1311

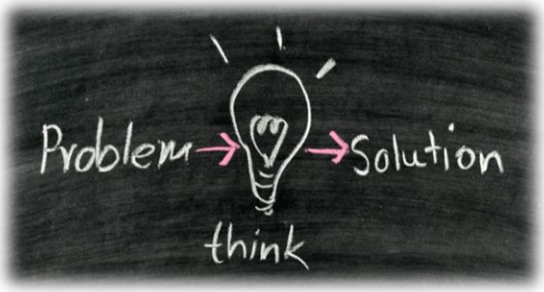
ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί κ-2, 2κ και 7κ+4, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι κ=4 και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2° όρο, τον 5° και τον 4° όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$. (Μονάδες 7)



1311

α) Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2\kappa)^2 = (\kappa - 2)\cdot(7\kappa + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa^2 = 7\kappa^2 + 4\kappa - 14\kappa - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\kappa^2 - 10\kappa - 8 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$

$$= (-10)^2 - 4\cdot 3\cdot(-8) =$$

$$= 100 + 96 = 196 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10)\pm\sqrt{196}}{2\cdot 3} = \frac{10\pm 14}{6} = \begin{cases} \frac{10+14}{6} = 4 \\ \frac{10-14}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Η τιμή $\kappa = -\frac{2}{3} < 0$ απορρίπτεται. Άρα $\kappa = 4$.

Για $\kappa = 4$ οι αριθμοί γράφονται $2, 8, 32$ οπότε ο λόγος είναι $\lambda = \frac{8}{2} = 4$.

β) i) Είναι:

$$\alpha_2 = \alpha_1\lambda^{2-1} = 4\alpha_1, \quad \alpha_4 = \alpha_1\lambda^{4-1} = \alpha_1 4^3 = 64\alpha_1, \quad \alpha_5 = \alpha_1\lambda^{5-1} = \alpha_1 4^4 = 256\alpha_1$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\alpha_2 + \alpha_5 =$$

$$= 4\alpha_1 + 256\alpha_1 =$$

$$= 4(\alpha_1 + 64\alpha_1) =$$

$$= 4(\alpha_1 + \alpha_4)$$

1312

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda-1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 13)

α) Η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 αν και μόνο αν ισχύει:

$$\lambda(-2)^2 - (\lambda-1)(-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda + 2(\lambda-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda + 2\lambda - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

β) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda-1)x - 1$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda-1)$, $\gamma = -1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$

$$= (-(\lambda-1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (-1) =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

Επειδή είναι $\Delta = (\lambda+1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

1314

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \quad \text{και} \quad -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1) και

$$-4 \leq \beta \leq -3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4 \cdot (-2) \geq -2\beta \geq -3 \cdot (-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8 \geq -2\beta \geq 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6 \leq -2\beta \leq 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$2 + 6 \leq \alpha - 2\beta \leq 4 + 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8 \leq \alpha - 2\beta \leq 12$$

β) Ισχύει ότι:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^2 \leq \alpha^2 \leq 4^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 \leq \alpha^2 \leq 16 \ (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$6 \cdot 2 \leq -2\alpha\beta \leq 8 \cdot 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12 \leq -2\alpha\beta \leq 32 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$4 + 12 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta \leq 16 + 32 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta \leq 48$$

1315

ΘΕΜΑ 2

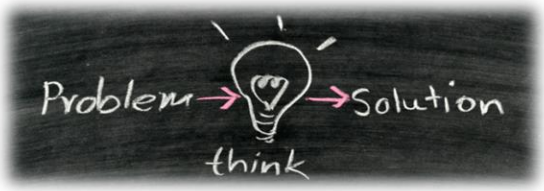
Έστω *α, β* πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς *α, β,* και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)



α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 5 \quad \text{και} \quad P = \alpha\beta = 4$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

1316

ΘΕΜΑ 2

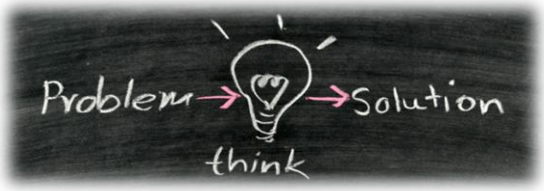
Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta = -12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)



α) Είναι:

$$\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = -12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2 = -12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta\cdot(-1)^2 = -12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta = -12$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad P = \alpha\beta = -12$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Για $\alpha = 1$, $\beta = 1$ και $\gamma = -12$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = 3 \\ \frac{-1-7}{2} = -4 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha = 3 \text{ και } \beta = -4) \text{ ή } (\alpha = -4 \text{ και } \beta = 3)$$

1317

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$ (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β. (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

α) Είναι:

$$K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3 - \beta) =$$
$$= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - (6\alpha - 2\alpha\beta) =$$
$$= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$$
$$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά ισχύει ότι:

$$K \geq \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε τιμή των α, β.

γ) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$K = \Lambda \Leftrightarrow \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\alpha + \beta)^2 = 0 \text{ και } (\alpha - 3)^2 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta = 0 \text{ και } \alpha - 3 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha = -\beta \text{ και } \alpha = 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha = 3 \text{ και } \beta = -3)$$

1318

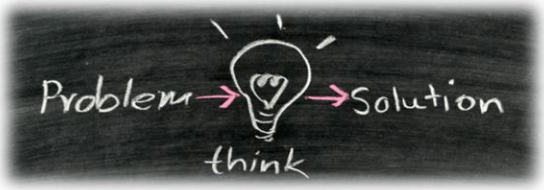
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι *μη μηδενικοί* πραγματικοί αριθμοί ***α, β,*** με ***α*** $\neq$ ***β*** για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{a^2+1}{\beta^2+1}=\frac{a}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί ***α*** και ***β*** είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{a^{22}\cdot\left(\beta^3\right)^8}{a^{-2}\cdot(a\beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)



α) Η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}\Leftrightarrow \beta(\alpha^2+1)=\alpha(\beta^2+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta+\beta=\alpha\beta^2+\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta+\beta-\alpha\beta^2-\alpha=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)=0\overset{\alpha\neq\beta}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta-1=0\Leftrightarrow \alpha\beta=1$$

Άρα οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) Η παράσταση γράφεται:

$$K=\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}=\frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\cdot\beta^{25}}=\frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{23}\cdot\beta^{25}}=\frac{\alpha^{22}}{\alpha^{23}}\cdot\frac{\beta^{24}}{\beta^{25}}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=1$$

1320

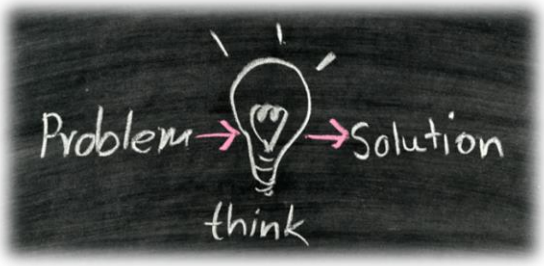
ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό *x* ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \le \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \le \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του *x*.

(Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$d(2x, 3) = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x-3| = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x-3| = -(2x-3) \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \le 0$$

Τότε από τη σχέση (1) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|2x-3| = -(2x-3) \Leftrightarrow 2x - 3 \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{3}{2}$$

β) Επειδή ισχύει $x \le \frac{3}{2}$ είναι $2x - 3 \le 0$ και $3 - x \ge 0$. Τότε:

$$|2x-3| = -(2x-3) \quad \text{και} \quad |3-x| = 3 - x$$

Επομένως η παράσταση Κ γράφεται:

$$K = |2x-3| - 2|3-x| = -(2x-3) - 2(3-x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3$$

1321

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του *x*, οι αριθμοί *x+4*, *2-x*, *6-x* με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν *x=5* και ο *6-x* είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο *λ* της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

α) Οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2-x)^2 = (6-x)\cdot(x+4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4-4x+x^2 = 6x+24-x^2-4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-6x-20=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10) = 9+40 = 49 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = 5 \\ \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

β) i) Για $x=5$:

$$\alpha_2 = x+4 = 9,\ \ \alpha_3 = 2-x = -3 \ \text{ και } \ \alpha_4 = 6-x = 1$$

Ο λόγος είναι $\lambda = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{1}{3}$.

ii) Είναι:

$$\alpha_2 = \alpha_1\lambda^{2-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9 = \alpha_1\left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -27$$

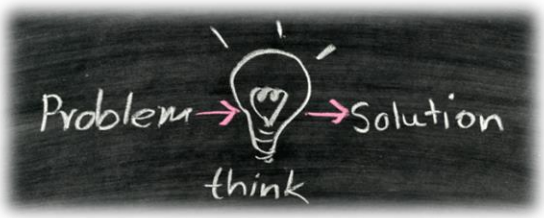
1322

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός *x* για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3+2<x-2+2<3+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1<x<5$$

β) Ισχύει ότι:

$$-1<x<5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-1<x \text{ και } x<5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0<x+1 \text{ και } x-5<0)$$

Άρα:

$$|x+1|=x+1 \quad \text{και} \quad |x-5|=-(x-5)=5-x$$

Τότε:

$$K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}=\frac{x+1+5-x}{3}=\frac{6}{3}=2$$

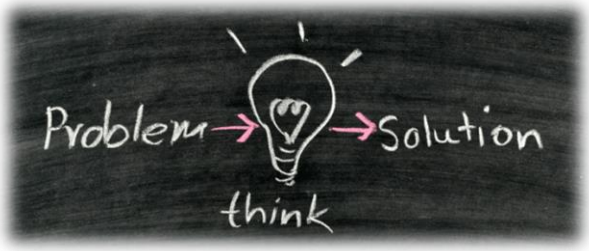
1323

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί *y*, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$|y-2|<1 \Leftrightarrow -1<y-2<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1+2<y-2+2<1+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<y<3 \Leftrightarrow y\in(1,3)$$

β) Ισχύει ότι:

$$1<y<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1<y \text{ και } y<3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0<y-1 \text{ και } y-3<0)$$

Άρα:

$$|y-1|=y-1 \quad \text{και} \quad |y-3|=-(y-3)=3-y$$

Τότε:

$$K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}=\frac{y-1+3-y}{2}=\frac{2}{2}=1$$

1324

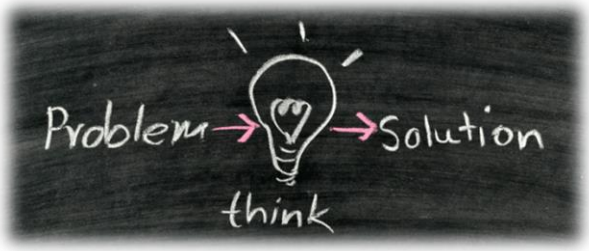
ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow -3 \ge -x \ge -5 \Leftrightarrow -5 \le -x \le -3 \ (1)$$

και από υπόθεση ισχύει ότι $-2 \le y \le -1$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2-5 \le y-x \le -1-3 \Leftrightarrow -7 \le y-x \le -4$$

β) Ισχύει ότι:

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow 3^2 \le x^2 \le 5^2 \Leftrightarrow 9 \le x^2 \le 25 \ (3)$$

και:

$$-2 \le y \le -1 \Leftrightarrow -2\cdot(-1) \ge y\cdot(-1) \ge -1\cdot(-1) \Leftrightarrow 2 \ge -y \ge 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \le -y \le 2 \Leftrightarrow 1^2 \le (-y)^2 \le 2^2 \Leftrightarrow 1 \le y^2 \le 4 \ (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$9+1 \le x^2+y^2 \le 25+4 \Leftrightarrow 10 \le x^2+y^2 \le 29$$

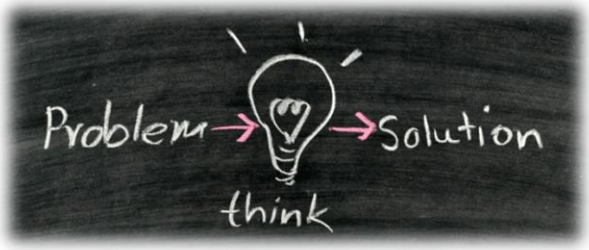
1325

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (25-1)\omega = \alpha_1 + (12-1)\omega + 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 24\omega = 11\omega + 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_\nu = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + (\nu-1)3 = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + 3\nu - 3 = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = 51$$

Άρα ο 51ος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

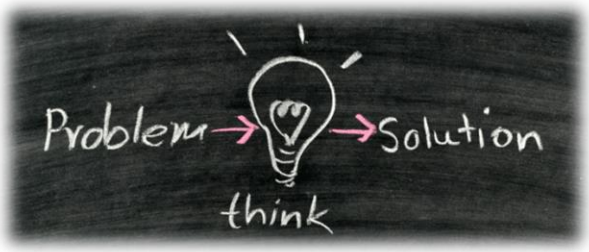
1326

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{a_{15}-a_9}{a_{10}-a_7}=2$. (Μονάδες 13)

β) Αν $a_{15}-a_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)



α) Είναι:

$$\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=\frac{\alpha_1+(15-1)\omega-[\alpha_1+(9-1)\omega]}{\alpha_1+(10-1)\omega-[\alpha_1+(7-1)\omega]}=$$

$$=\frac{\alpha_1+14\omega-\alpha_1-8\omega}{\alpha_1+9\omega-\alpha_1-6\omega}=$$

$$=\frac{6\omega}{3\omega}=2$$

β) Έχουμε:

$$\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{18}{\alpha_1+9\omega-\alpha_1-6\omega}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{18}{3\omega}=2\Leftrightarrow 18=6\omega\Leftrightarrow\omega=3$$

1327

ΘΕΜΑ 2

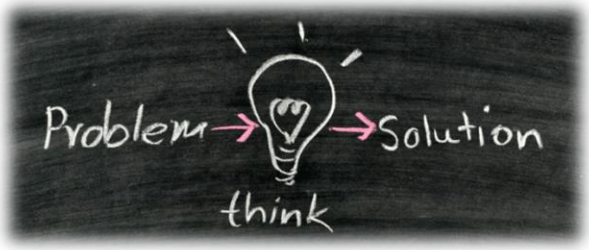
Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$ (Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha = -3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)



α) i) Για $\alpha = 1$ η εξίσωση γράφεται:

$$(1+3)x = 1^2 - 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2$$

ii) Για $\alpha = -3$ η εξίσωση γράφεται:

$$(-3+3)x = (-3)^2 - 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0x = 0, \text{ ταυτότητα}$$

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+3)x = (\alpha+3)(\alpha-3) \overset{\alpha \neq -3}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\alpha+3)x}{\alpha+3} = \frac{(\alpha+3)(\alpha-3)}{\alpha+3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \alpha - 3$$

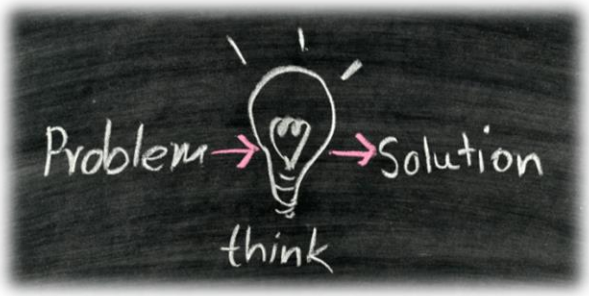
1328

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$. (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$\alpha_4 - \alpha_9 = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (4-1)\omega - [\alpha_1 + (9-1)\omega] = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - 8\omega = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = -3$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 + (\nu - 1)(-3) = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 - 3\nu + 3 = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 44 = 4\nu \Leftrightarrow \nu = 11$$

1329

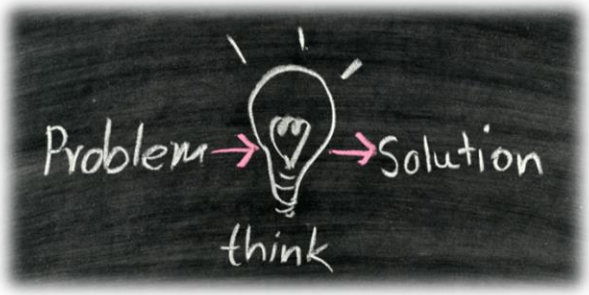
ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (6-1)\omega + \alpha_1 + (11-1)\omega = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 5\omega + 10\omega = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15 \cdot 4 = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10$$

β) Έχουμε:

$$S_\nu = 0 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2(-10) + (\nu-1)4] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(-20 + 4\nu - 4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -24 + 4\nu = 0 \Leftrightarrow 4\nu = 24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu = 6$$

Άρα πρέπει να προσθέσουμε 6 όρους ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με μηδέν.

1330

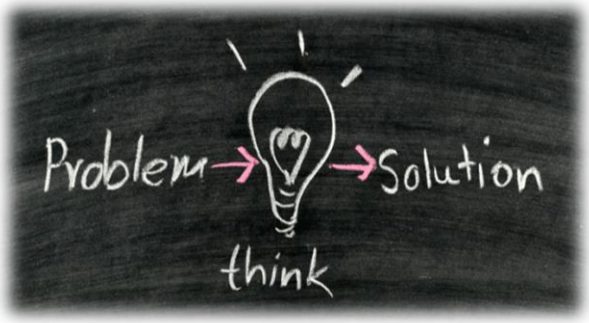
ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3| \le 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x-3| \ge 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)



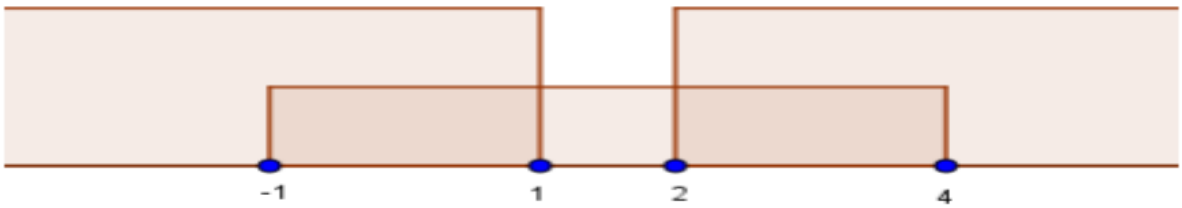
αi) Είναι:

$$|2x-3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 2x-3 \le 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 \le 2x \le 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1 \le x \le 4$$

αii) Είναι:

$$|2x-3| \ge 1 \Leftrightarrow (2x-3 \le -1 \text{ ή } 2x-3 \ge 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \le 1 \text{ ή } x \ge 2)$$

β)



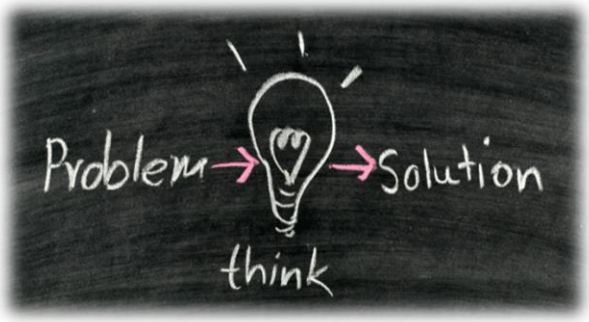
1331

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6=0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)



α) Το τριώνυμο $2x^2 - x - 6$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1+7}{4} = 2 \\ \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

β) Είναι:

$$|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + 1 < x - 1 + 1 < 2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 3$$

γ) Η τιμή του x που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2) είναι η $x = 2$.

1332

ΘΕΜΑ 2

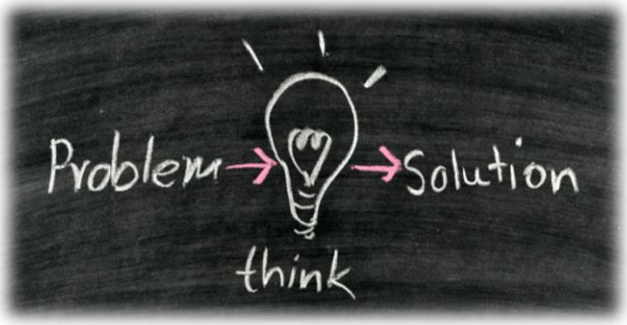
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0.$$ (Μονάδες 15)



1332

α) Η παράσταση Π ορίζεται για $x \in R$ με:

$$(x^2 - x \neq 0 \text{ και } 1 - x \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x(x-1) \neq 0 \text{ και } x \neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x - 1 \neq 0 \text{ και } x \neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq 1 \text{ και } x \neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq 1)$$

Επομένως η παράσταση Π έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε $x \in R - \{0, 1\}$

β) Για κάθε $x \in R - \{0, 1\}$ ισχύει ότι:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\frac{2x^2-1}{x(x-1)} - x(x-1)\frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

Για $\alpha = 2$, $\beta = -1$ και $\gamma = -1$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Η ρίζα $x = 1$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = -\frac{1}{2}$.

1334

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α ,β, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272 .$$

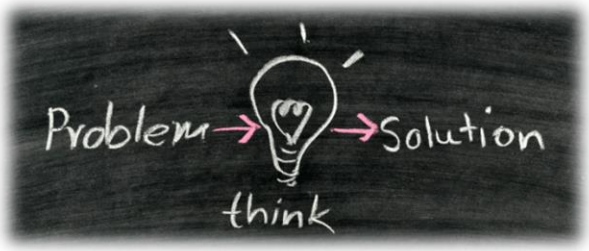
α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64 .$$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α ,β. (Μονάδες 7)



α) Αντικαθιστώντας στην ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$12^2 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow 144 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta = -128 \Leftrightarrow \alpha\beta = -64$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad P = \alpha\beta = -64$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 12x - 64 = 0$$

γ) Για $\alpha = 1$, $\beta = -12$ και $\gamma = -64$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 144 + 256 = 400 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 20}{2} = \begin{cases} \frac{12+20}{2} = 16 \\ \frac{12-20}{2} = -4 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha = 16 \text{ και } \beta = -4) \text{ ή } (\alpha = -4 \text{ και } \beta = 16)$$

1335

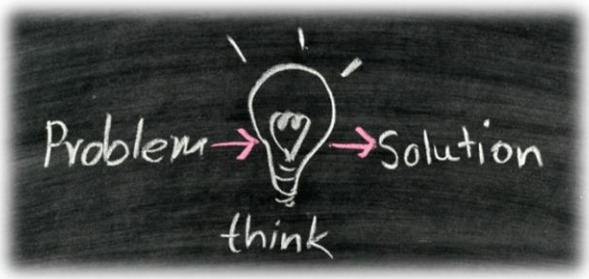
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *B*; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\leq 2$, ισχύει *A*=B. (Μονάδες 10)



α) Πρέπει:

$$(x-2)^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$$

β) Πρέπει:

$$(2-x)^3\geq 0 \Leftrightarrow 2-x\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -2 \Leftrightarrow x\leq 2 \Leftrightarrow x\in(-\infty\,,2]$$

γ) Για κάθε $x\leq 2$, είναι:

$$|x-2|=-(x-2)=2-x$$

Τότε:

$$A=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=2-x \quad \text{και} \quad B=\sqrt[3]{(2-x)^3}=2-x$$

Άρα $A=B$

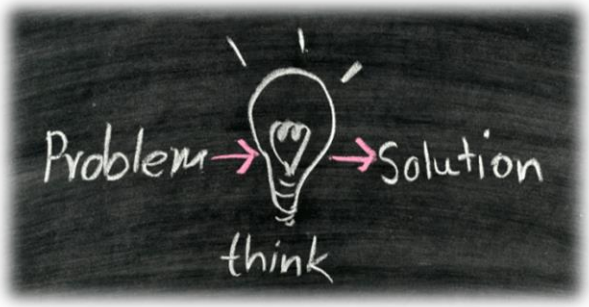
1336

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί *x+6, 5x+2, 11x-6* είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του *x* και να αποδείξετε ότι $\omega=4$. (Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)



α) Οι αριθμοί x + 6, 5x + 2, 11x – 6 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$5x + 2 = \frac{x+6+11x-6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 2 = \frac{12x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 2 = 6x \Leftrightarrow x = 2$$

Είναι:

$$\omega = 5x + 2 - (x + 6) =$$

$$= 5x + 2 - x - 6 =$$

$$= 4x - 4 = 4 \cdot 2 - 4 = 4$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_8 = \alpha_1 + (8 - 1)\omega = 0 + 7 \cdot 4 = 28$$

Τότε είναι:

$$S_8 = \frac{8}{2}(\alpha_1 + \alpha_8) = 4(0 + 28) = 4 \cdot 28 = 112$$

1337

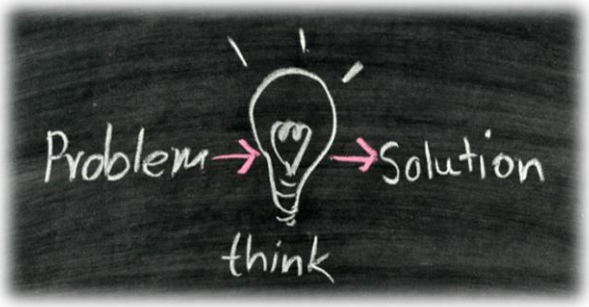
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B=\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A\cdot B=\dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B

(Μονάδες 13)



1337

α) • Είναι:

$$A + B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} + \frac{3-\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{3-\sqrt{7}+3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{6}{3^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{6}{9-7} = \frac{6}{2} = 3$$

• Ισχύει ότι:

$$A \cdot B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{3+\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{1}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{1}{3^2-(\sqrt{7})^2} =$$

$$= \frac{1}{9-7} = \frac{1}{2}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = A + B = 3 \quad \text{και} \quad P = A \cdot B = \frac{1}{2}$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0$$

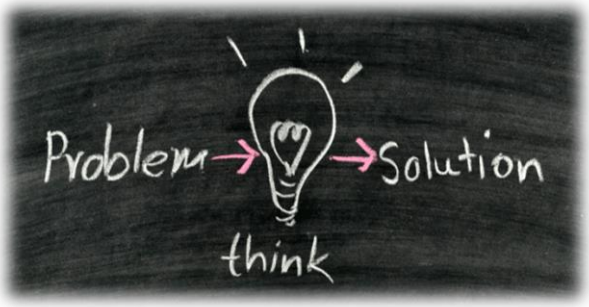
1338

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β . (Μονάδες 10)



α) Είναι:

$$A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{5}=$$
$$=5^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot 5^{\frac{1}{6}}=\sqrt{3}\cdot 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=$$
$$=\sqrt{3}\cdot 5^{\frac{3}{6}}=\sqrt{3}\cdot 5^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$$

β) Είναι:

$$A=\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}=(5^2)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{25} \quad \text{και} \quad B=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{27}$$

Ισχύει ότι:

$$25<27 \Leftrightarrow \sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{27} \Leftrightarrow A<B$$

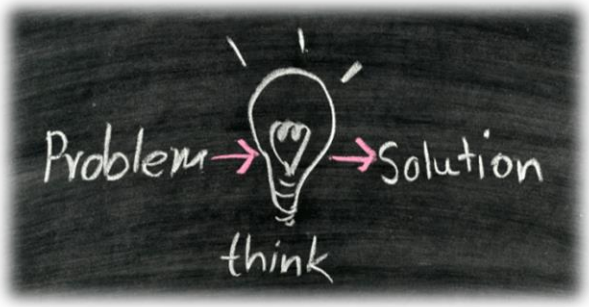
1339

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{a_5}{a_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 15)



α) Είναι:

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1\lambda^{5-1}}{\alpha_1\lambda^{2-1}} = 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda^4}{\lambda} = 27 \Leftrightarrow \lambda^3 = 27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 = 3^3 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$S_4 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1\frac{\lambda^4-1}{\lambda-1} = 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1\frac{3^4-1}{3-1} = 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1\frac{81-1}{2} = 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40\alpha_1 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 = 5$$

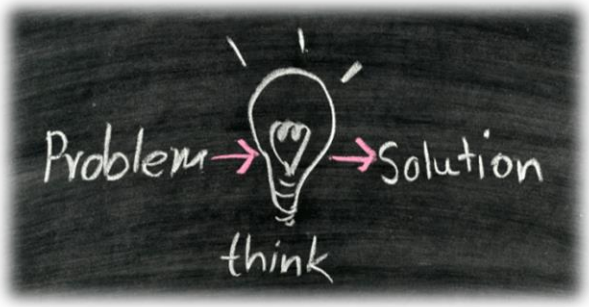
1340

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B=1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2+B^2$. (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$A \cdot B = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4-3 = 1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\Pi = A^2 + B^2 =$$

$$= (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2 =$$

$$= 2^2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 2^2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 =$$

$$= 4+3+4+3 = 14$$

1342

ΘΕΜΑ 2

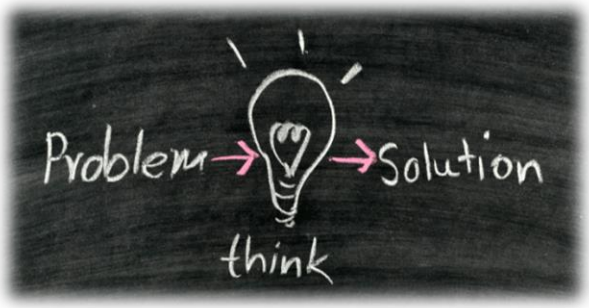
Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<x<1$ (Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$1, \quad x, \quad x^2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



α) Είναι:

$$|2x-1|<1 \Leftrightarrow -1<2x-1<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+1<2x-1+1<1+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<2x<2 \Leftrightarrow 0<x<1$$

β) Ισχύει ότι $0<x<1$, οπότε:

$$x<1 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x\cdot x<1\cdot x \Leftrightarrow x^2<x$$

Τελικά:

$$x^2<x<1$$

1343

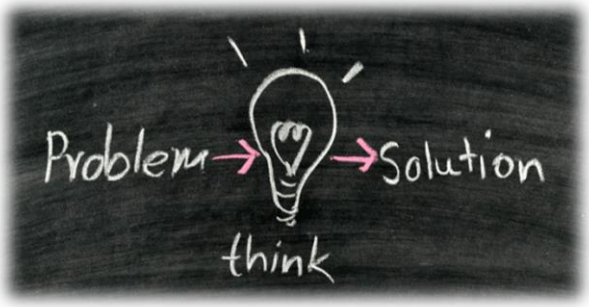
ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega=3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Μονάδες 13)

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).



1343

α) Είναι:

$$\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (5-1)\omega = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Έχουμε:

$$S_\nu = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\cdot 2 + (\nu-1)3] = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(4 + 3\nu - 3) = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(3\nu + 1) = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\nu^2+\nu}{2} = 77 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu = 154 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 154 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 3\cdot(-154) = 1 + 1.848 = 1.849 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1\pm\sqrt{1849}}{2\cdot 3} = \frac{-1\pm 43}{6} = \begin{cases} \frac{-1+43}{6} = 7 \\ \frac{-1-43}{6} = -\frac{44}{6} \end{cases}$$

Η τιμή $\nu = -\frac{44}{6}$ απορρίπτεται, καθώς $\nu \in N$. Άρα πρέπει να προσθέσουμε 7 όρους της προόδου ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με 77.

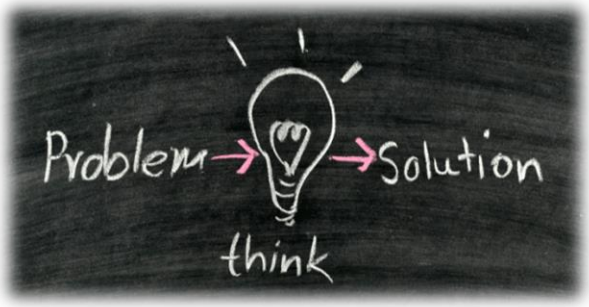
1344

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: *1, 3, 5, 7, ...*

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των *ν* πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)



α) Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος διότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με την πρόσθεση του ίδια πάντα αριθμού.

Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1$ και η διαφορά της είναι $\omega = 2$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ βρίσκουμε:

$$\alpha_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 2 = 1 + 99 \cdot 2 = 1 + 198 = 199$$

β) Το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2] =$$

$$= \frac{\nu}{2}(2 + 2\nu - 2) = \frac{\nu}{2} \cdot 2\nu = \nu^2$$

Επομένως, το άθροισμα είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

1345

ΘΕΜΑ 2

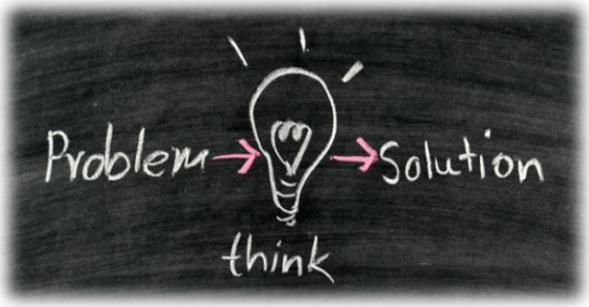
Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)



1345

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in R$ με:

$$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{3\}$.

Θα παραγοντοποιήσουμε το $x^2 - 5x + 6$.

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

β) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x - 2, \quad x \neq 3$$

γ) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(2, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0 - 2 = -2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -2)$.

1346

ΘΕΜΑ 2

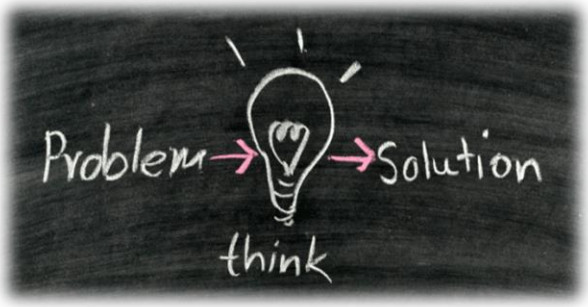
Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

(Μονάδες 13)



1346

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = \lambda^2 + \lambda - 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 + \lambda - 1) =$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = -3\lambda^2 - 4\lambda + 4$$

Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0$$

Το τριώνυμο $-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 16 + 48 = 64 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = \frac{4 \pm 8}{-6} = \begin{cases} \frac{4+8}{-6} = -2 \\ \frac{4-8}{-6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Επομένως ισχύει:

$$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right] \textbf{ (1)}$$

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{1} = \lambda^2 + \lambda - 1$$

Τότε:

$$S^2 - P - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda + 1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq -1 \textbf{ (2)}$$

Από συναλήθευση των **(1)** και **(2)** έχουμε $\lambda \in [-2, -1]$

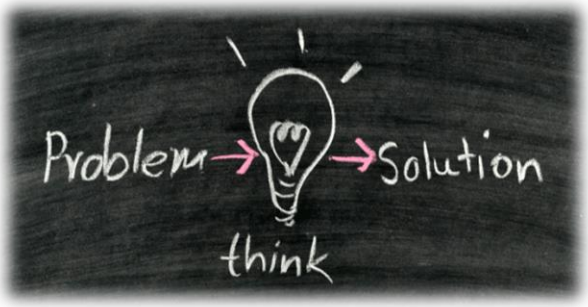
1347

ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει **κ** καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η $7^η$ σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)



1347

α) Επειδή το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς προκύπτει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης σειράς προσθέτοντας πάντα τον ίδιο αριθμό, τα καθίσματα, αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

β) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$\alpha_7 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 + (7-1)\omega = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 6\omega \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$S_{10} = 300 \Leftrightarrow \frac{10}{2}[2\alpha_1 + (10-1)\omega] = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(2\alpha_1 + 9\omega) = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\alpha_1 + 45\omega = 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 9\omega = 60 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2(36 - 6\omega) + 9\omega = 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72 - 12\omega + 9\omega = 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\omega = -12 \Leftrightarrow \omega = 4$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 36 - 6 \cdot 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12$$

Επομένως η πρώτη σειρά έχει $\alpha_1 = 12$ καθίσματα

Η δεύτερη σειρά έχει $\alpha_2 = 16$ καθίσματα.

Η τρίτη σειρά έχει $\alpha_3 = 20$ καθίσματα.

Η τέταρτη σειρά έχει $\alpha_4 = 24$ καθίσματα.

Η πέμπτη σειρά έχει $\alpha_5 = 28$ καθίσματα.

Η έκτη σειρά έχει $\alpha_6 = 32$ καθίσματα.

Η έβδομη σειρά έχει $\alpha_7 = 36$ καθίσματα.

Η όγδοη σειρά έχει $\alpha_8 = 40$ καθίσματα.

Η ένατη σειρά έχει $\alpha_9 = 44$ καθίσματα.

Η δέκατη σειρά έχει $\alpha_{10} = 48$ καθίσματα.

1348

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

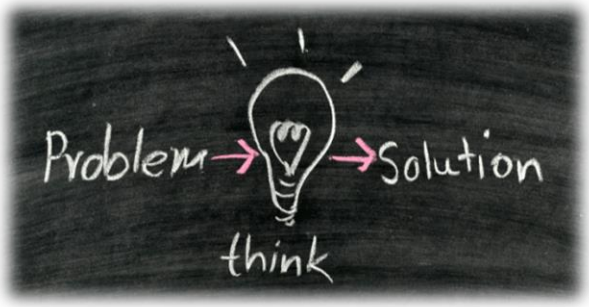
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$ (Μονάδες 9)



α) Είναι: $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$ και $\gamma = 4(\lambda - 1)$. Τότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$
$$= (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) =$$
$$= 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 =$$
$$= (2\lambda - 4)^2$$

β) Επειδή $\Delta = (2\lambda - 4)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2\lambda}{1} = 2\lambda \text{ και}$$
$$x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4(\lambda - 1)}{1} = 4(\lambda - 1) = 4\lambda - 4$$

Άρα:

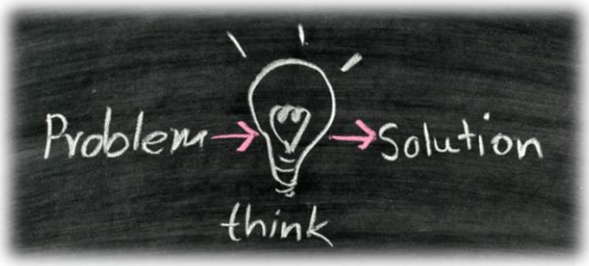
$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 = 2\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2$$

1349

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με α< β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2+\beta \cdot x+3=0$ (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$|2x-1|=3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x-1=3 \text{ ή } 2x-1=-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x=4 \text{ ή } 2x=-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=-1)$$

β) Είναι $\alpha=-1$ και $\beta=2$. Τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-x^2+2x+3=0$$

Για $\alpha=-1$, $\beta=2$ και $\gamma=3$, βρίσκουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16>0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

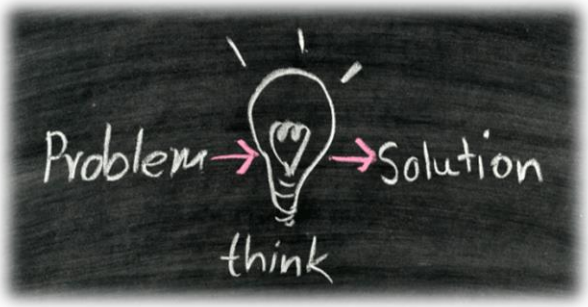
$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2(-1)}=\frac{-2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{-2}=-1\\ \frac{-2-4}{-2}=3\end{cases}$$

1350

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$ (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)



1350

α) Είναι:

$$|2x-5| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2x-5 \le 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3+5 \le 2x-5+5 \le 3+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \le 2x \le 8 \Leftrightarrow \frac{2}{2} \le \frac{2x}{2} \le \frac{8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \le x \le 4 \quad (1)$$

Το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

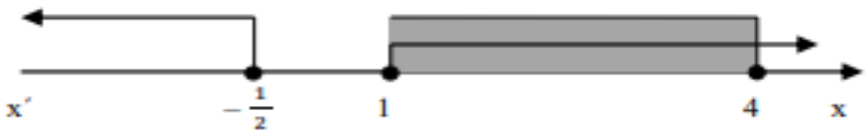
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$2x^2 - x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x \le -\frac{1}{2} \text{ ή } x \ge 1\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty) \quad (2)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$1 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$$

1351

ΘΕΜΑ 2

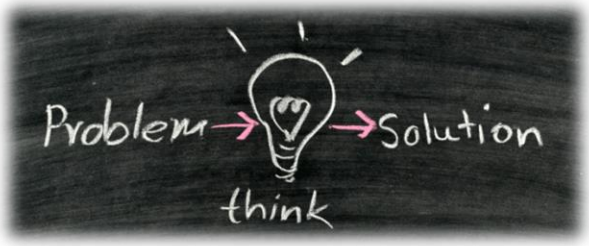
Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



α) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

β) Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \overset{\lambda \neq 1}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda-1)x}{\lambda-1} = \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \lambda + 1$$

γ) Η εξίσωση είναι ταυτότητα αν και μόνο αν:

$$(\lambda - 1 = 0 \text{ και } (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ και } \lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda + 1 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ και } \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

1352

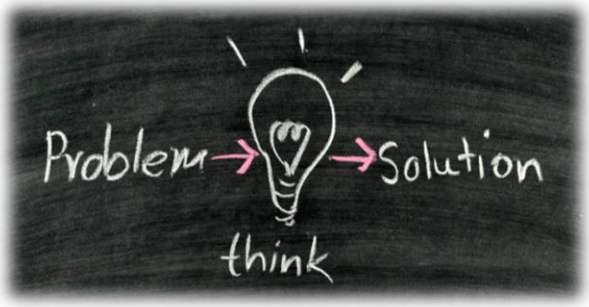
ΘΕΜΑ 2

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{a}$$ (Μονάδες 12)



α) Είναι:

$$0 < \alpha < 1 \overset{\alpha^2>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha^2 < 1 \cdot \alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3 < \alpha^2$$

β) Ισχύει ότι:

- $0 < \alpha \Leftrightarrow 0 < \alpha^3$,
- $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha^3 < \alpha$
- $\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha^3 < 1^3 \Leftrightarrow \alpha^3 < 1$,
- $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$

Τελικά:

$$0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$$

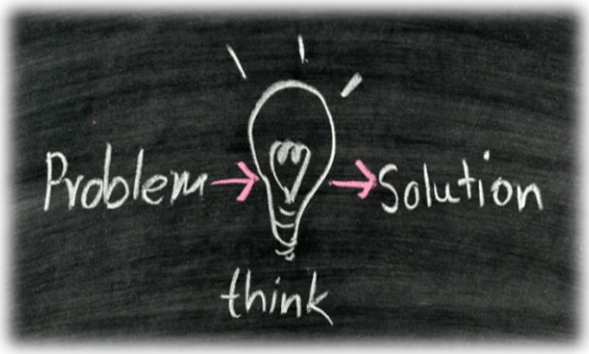
1353

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10 \qquad \text{(Μονάδες 12)}$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2-2x+1^2+y^2+2\cdot 3\cdot y+3^2=$$
$$=x^2-2x+1+y^2+6y+9=x^2+y^2-2x+6y+10$$

β) Ισχύει ότι:

$$x^2+y^2-2x+6y+10=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} (x-1)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x-1)^2=0 \text{ και } (y+3)^2=0) \Leftrightarrow (x-1=0 \text{ και } y+3=0) \Leftrightarrow (x=1 \text{ και } y=-3)$$

1354

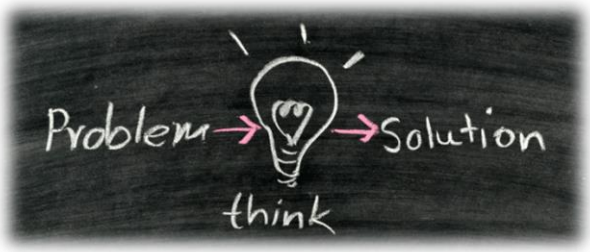
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A. (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει : $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ (Μονάδες 10)



α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in R$ με:

$$x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1 \neq 0 \text{ και } x+1 \neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \neq 1 \text{ και } x \neq -1)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R-\{-1,1\}$.

β) Το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ έχει $\alpha=2$, $\beta=-5$, $\gamma=3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 1}{4}=\begin{cases}\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}\\ \frac{5-1}{4}=1\end{cases}$$

Τότε:

$$2x^2-5x+3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)=(2x-3)(x-1)$$

γ) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\frac{(2x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x-3}{x+1},\ (x\neq 1 \text{ και } x\neq -1)$$

1355

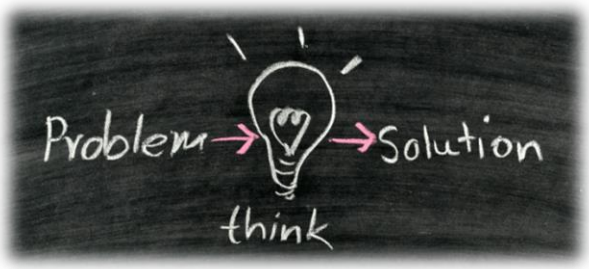
ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)



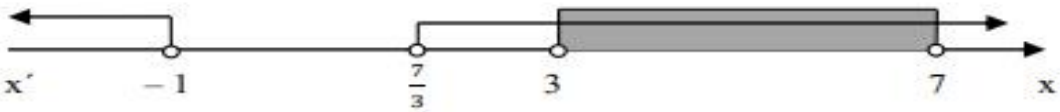
α) Είναι:

$$|x-5|<2 \Leftrightarrow -2<x-5<2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2+5<x-5+5<2+5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3<x<7 \quad (1)$$

β) Ισχύει ότι:

$$|2-3x|>5 \Leftrightarrow 2-3x<-5 \text{ ή } 2-3x>5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3x<-5-2 \text{ ή } -3x>5-2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-3x<-7 \text{ ή } -3x>3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x>\tfrac{7}{3} \text{ ή } x<-1\right) \quad (2)$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$3<x<7 \Leftrightarrow x\in(3,7)$$

1356

ΘΕΜΑ 2

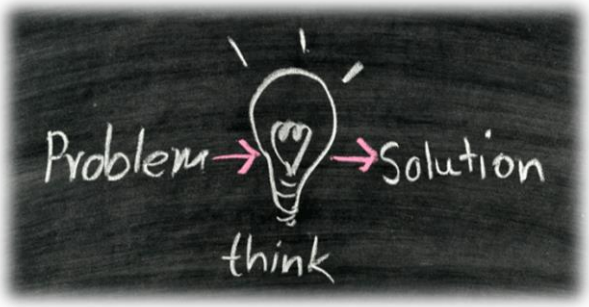
Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$

(Μονάδες 10)



1356

α) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3+1}{4} = 1 \\ \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

β) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$2x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

γ) • Ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ διότι:

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 < \sqrt{3}^2 < 2^2 \Leftrightarrow 1 < 3 < 4, \text{ ισχύει}$$

• Ο αριθμός $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ διότι:

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 < \sqrt{2}^2 < 2^2 \Leftrightarrow 1 < 2 < 4, \text{ ισχύει}$$

Τελικά οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

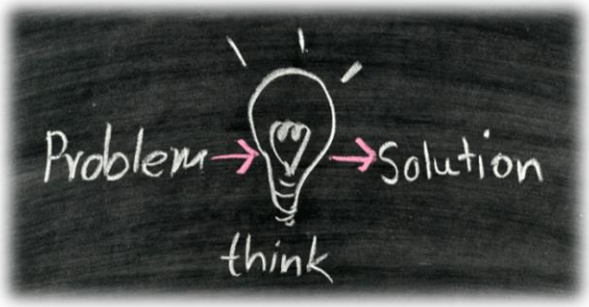
1357

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)



α) Είναι:

$$3x-1<x+9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x-x<9+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x<10 \Leftrightarrow x<5 \quad (1)$$

Ισχύει ότι:

$$2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-x\le 2x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2x-x\le 1-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3x\le -3 \Leftrightarrow x\ge 1 \quad (2)$$

β) Συναληθεύουμε τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1\le x<5 \Leftrightarrow x\in[1,5)$$

1358

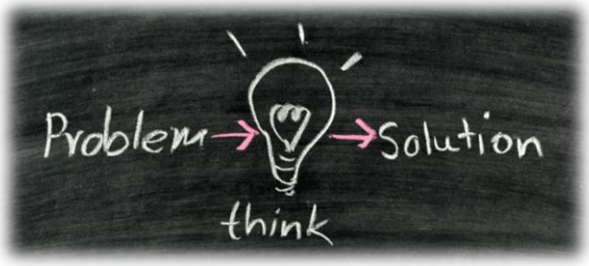
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)



α) Είναι:

- $f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-15=1-2-15=-16$
- $f(0)=0^2+2\cdot 0-15=0+0-15=-15$
- $f(1)=1^2+2\cdot 1-15=1+2-15=-12$

Τότε:

$$f(-1)+f(0)+f(1)=-16-15-12=-43$$

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x-15=0$$

Το τριώνυμο $x^2+2x-15$ έχει $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-15$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases}\frac{-2+8}{2}=3\\ \frac{-2-8}{2}=-5\end{cases}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(-5,0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0)=0^2+2\cdot 0-15=0+0-15=-15$$

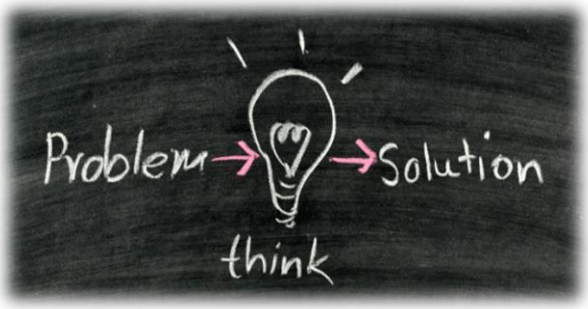
Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,-15)$.

1359

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)



α) Είναι:

$$|x-2|=\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2=\sqrt{3} \text{ ή } x-2=-\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=2+\sqrt{3} \text{ ή } x=2-\sqrt{3})$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2-Sx+P=0$$

με

$$S=x_1+x_2=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4 \text{ και}$$

$$P=x_1x_2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2-4x+1=0$$

1360

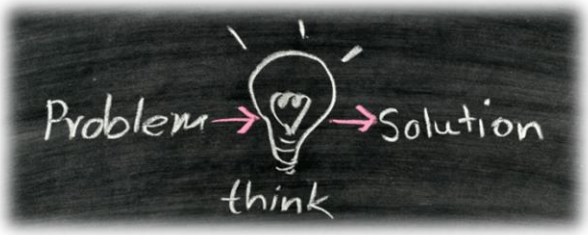
ΘΕΜΑ 2

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu=2^{\nu-3}.$$ (Μονάδες 12)



α) Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ βρίσκουμε:

$$\alpha_3 = \alpha_1\lambda^{3-1} \Leftrightarrow 1 = \alpha_1\lambda^2 \quad (1)$$

και

$$\alpha_5 = \alpha_1\lambda^{5-1} \Leftrightarrow 4 = \alpha_1\lambda^4 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\frac{4}{1} = \frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda^2} \Leftrightarrow 4 = \lambda^2 \Leftrightarrow (\lambda = -2, \text{ απορρίπτεται ή } \lambda = 2) \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$1 = \alpha_1 2^2 \Leftrightarrow 1 = \alpha_1 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}$$

β) Ο ν – οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = \frac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \frac{1}{2^2}\cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{-2}\cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1-2} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-3}$$

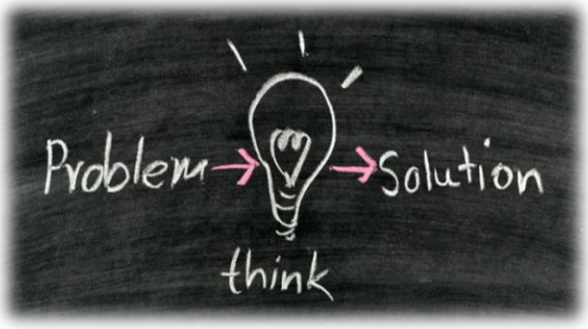
1363

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\leq 0$ (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (Μονάδες7)



1363

α) Είναι:

$$\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5|x+1| - 3(|x+1|+4) = 5 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5|x+1| - 3|x+1| - 12 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x+1| = 22 \Leftrightarrow |x+1| = 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1 = -11 \text{ ή } x+1 = 11) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -12 \text{ ή } x = 10)$$

β) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 3$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2 + 2x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Επομένως ισχύει:

$$-x^2 + 2x + 3 \le 0 \Leftrightarrow (x \le -1 \text{ ή } x \ge 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

γ) Ο αριθμός -12 ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και ο αριθμός 10 ανήκει στο διάστημα $[3, +\infty)$. Συνεπώς και οι δύο αριθμοί είναι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης.

1365

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

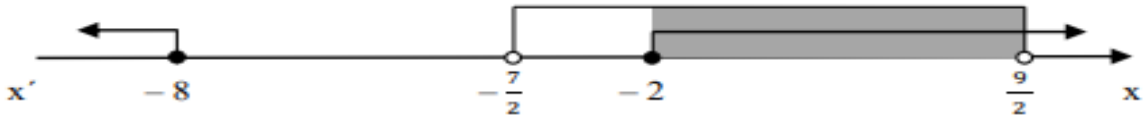
α) Είναι:

$$\left|x-\tfrac{1}{2}\right|<4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4<x-\tfrac{1}{2}<4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4+\tfrac{1}{2}<x<4+\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\tfrac{7}{2}<x<\tfrac{9}{2}$$

β) Ισχύει ότι:

$$|x+5|\geq 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+5\leq -3 \text{ ή } x+5\geq 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x\leq -8 \text{ ή } x\geq -2)$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

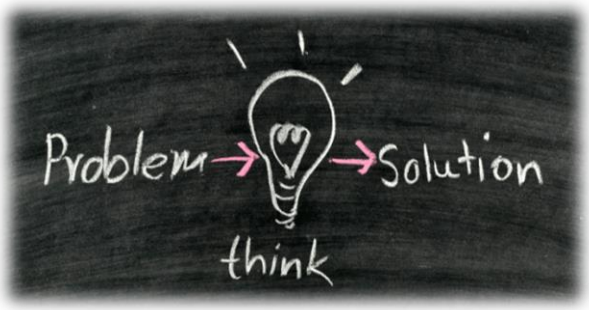
$$-2\leq x<\tfrac{9}{2} \Leftrightarrow x\in\left[-2,\tfrac{9}{2}\right)$$

1366

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$. (Μονάδες 10)



α) Για κάθε $\alpha < 0$, ισχύει:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

β) Αφού $\alpha < 0$ είναι $|\alpha| = -\alpha$, Τότε:

$$|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2, \text{ ισχύει από σκέλος } (\alpha)$$

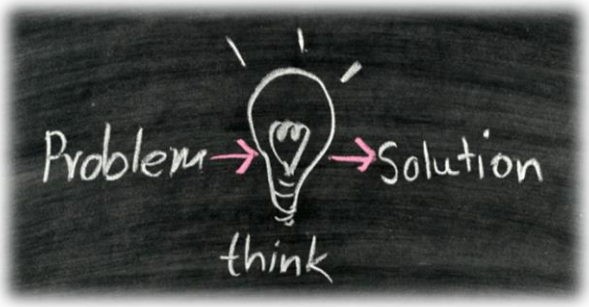
1367

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4| = 3|x-1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



1367

α) Είναι:

$$|2x-4|3|x-1| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{2x-4=-3(x-1) \text{ ή } 2x-4=3(x-1)\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{2x-4=-3x+3 \text{ ή } 2x-4=3x-3\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{5x=7 \text{ ή } -x=1\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{x=\frac{5}{7} \text{ ή } x=-1\right\}$$

β) Ισχύει ότι:

$$|3x-5|>1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{2x-5<-1 \text{ ή } 3x-5>1\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{3x<4 \text{ ή } 3x>6\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{x<\frac{4}{3} \text{ ή } x>2\right\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty,\frac{4}{3}\right) \cup (2,+\infty)$$

γ) Είναι $\frac{7}{5}-\frac{4}{3}=\frac{21}{15}-\frac{20}{15}=\frac{1}{15}>0 \Leftrightarrow \frac{7}{5}>\frac{4}{3}$ και $\frac{7}{5}-2=\frac{7}{5}-\frac{10}{5}=-\frac{3}{5}<0 \Leftrightarrow \frac{7}{5}<2$. Άρα ο αριθμός $\frac{7}{5}$ δεν ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right) \cup (2,+\infty)$, οπότε δεν είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

Είναι $-1<0<\frac{4}{3}$, άρα ο αριθμός -1 ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right) \cup (2,+\infty)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

1368

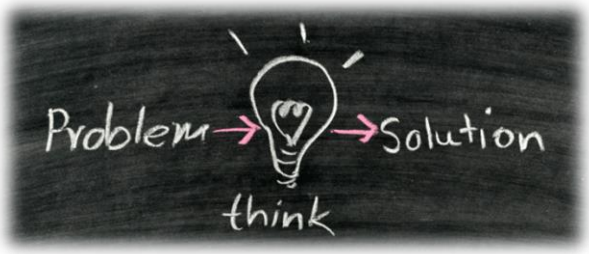
ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ (Μονάδες 5)

β) $2x-3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)



α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$ και βρίσκουμε:

$$2+1 \le x+y \le 3+2 \Leftrightarrow 3 \le x+y \le 5.$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $2 \le x \le 3$ με 2 και βρίσκουμε:

$$2 \cdot 2 \le 2x \le 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 \le x \le 6. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \le y \le 2$ με -3 και βρίσκουμε:

$$(-3) \cdot 1 \ge -3y \ge (-3) \cdot 2 \Leftrightarrow -3 \ge -3y \ge -6 \Leftrightarrow -6 \le -3y \le -3 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$4-6 \le 2x-3y \le 6-3 \Leftrightarrow -2 \le 2x-3y \le 3.$$

γ) Ισχύει ότι:

$$2 \le x \le 3 \ (3) \ \text{και} \ 1 \le y \le 2 \Leftrightarrow 1 \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1 \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \le x \cdot \frac{1}{y} \le 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{y} \le 3.$$

1369

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 10)

α) • Για $\lambda=-1$, η εξίσωση γράφεται:

$$((-1)^2-9)x=(-1)^2-3(-1)\Leftrightarrow -8x=4$$

• Για $\lambda=0$, η εξίσωση γράφεται:

$$(0^2-9)x=0^2-3\cdot 0\Leftrightarrow -9x=0$$

• Για $\lambda=1$, η εξίσωση γράφεται:

$$(1^2-9)x=1^2-3\cdot 1\Leftrightarrow -8x=-2$$

β) Η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda^2-9\neq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-3)(\lambda+3)\neq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lambda-3\neq 0 \text{ και } \lambda+3\neq 0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lambda\neq 3 \text{ και } \lambda\neq -3)$$

γ) Για $x=4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$(\lambda^2-9)\cdot 4=\lambda^2-3\lambda\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(\lambda-3)(\lambda+3)=\lambda(\lambda-3)\overset{\lambda\neq 3}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow\frac{4(\lambda-3)(\lambda+3)}{\lambda-3}=\frac{\lambda(\lambda-3)}{\lambda-3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(\lambda+3)=\lambda\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\lambda+12=\lambda\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\lambda=-12\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lambda=-4$$

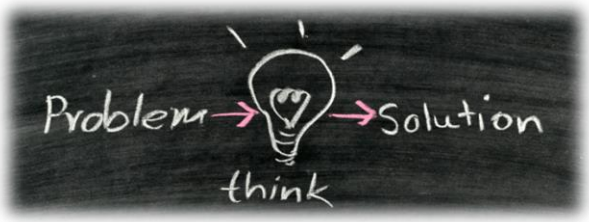
1370

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1,2,3,...ν

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)



α) Η πρόοδος που έχει δοθεί είναι αριθμητική με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 1$. Τότε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] =$$

$$= \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 1] =$$

$$= \frac{\nu}{2}(2 + \nu - 1) =$$

$$= \frac{\nu}{2}(1 + \nu) = \frac{\nu + \nu^2}{2}$$

β) Είναι:

$$S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu + \nu^2}{2} = 45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu^2 + \nu = 45 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 1 + 360 = 361 > 0$$

και οι ρίζες είναι:

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{-1+19}{2} = 9 \\ \frac{-1-19}{2} = -10 \end{cases}$$

Η τιμή $\nu = -10$ απορρίπτεται. Επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε 9 διαδοχικούς θετικούς ακέραιους για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

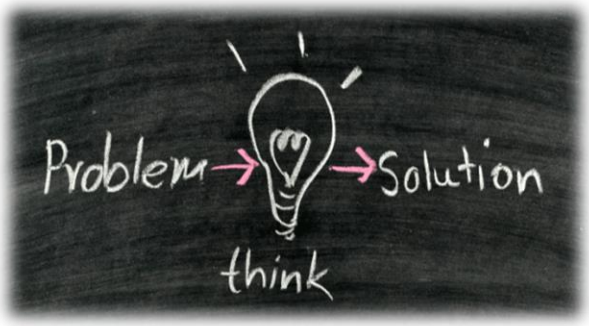
1371

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)



α) Είναι:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha|\cdot|\beta|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2 \geq 2|\alpha|\cdot|\beta| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha|\cdot|\beta| \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha|-|\beta|)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

β) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$(|\alpha|-|\beta|)^2=0 \Leftrightarrow |\alpha|-|\beta|=0 \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta| \Leftrightarrow (\alpha=\beta \text{ ή } \alpha=-\beta),$$

δηλαδή όταν οι αριθμοί είναι ίσοι ή αντίθετοι.

1372

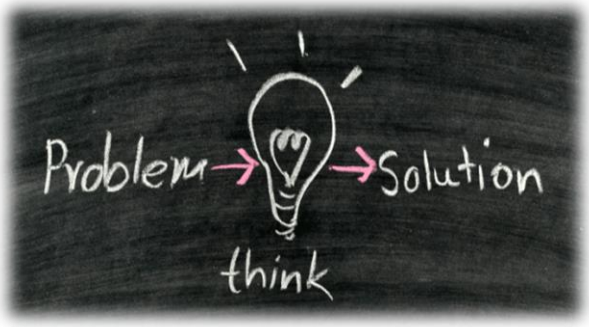
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$. (Μονάδες 9)



α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$A = (-\infty, 3] \cup (3, 10) = (-\infty, 10)$$

β) Είναι:

- $f(-1) = 2\cdot(-1) - 5 = -2 - 5 = -7$
- $f(3) = 2\cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$
- $f(5) = 5^2 = 25$

γ) • Για $x \le 3$ είναι:

$$f(x) = 25 \Leftrightarrow 2x - 5 = 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow x = 15, \text{ απορρίπτεται}$$

• Για $3 < x < 10$ είναι:

$$f(x) = 25 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = 5 \text{ ή } x = -5, \text{ απορρίπτεται}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$

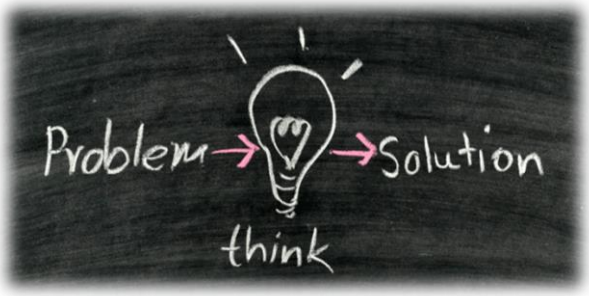
1373

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί *α*, *β*, με *α* > *0* και *β* > *0*. Να αποδείξετε ότι:

α) $a+\frac{4}{a}\geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$ (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha^2+4\geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+4\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2\geq 0,$$ το οποίο ισχύει

β) Είναι:

$$\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4 \quad (1)$$

και όμοια αποδεικνύουμε ότι:

$$\beta+\frac{4}{\beta}\geq 4 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$$

ΘΕΜΑ 2

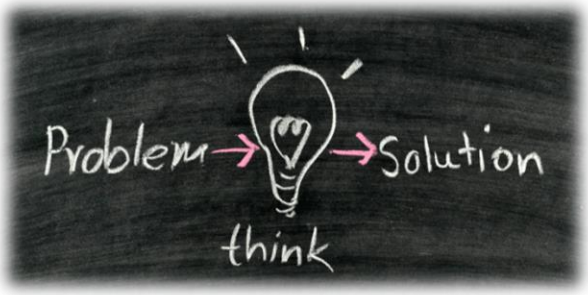
α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1-2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)



1374

α) i) Είναι:

$$|1-2x|<5 \Leftrightarrow -5<1-2x<5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5-1<1-2x-1<5-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6<-2x<4 \Leftrightarrow \frac{-6}{-2}>\frac{-2x}{-2}>\frac{4}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3>x>-2 \Leftrightarrow -2<x<3$$

ii) Ισχύει ότι:

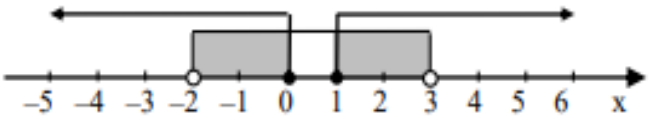
$$|1-2x|\geq 1 \Leftrightarrow (1-2x\leq -1 \text{ ή } 1-2x\geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2x\leq -2 \text{ ή } -2x\geq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-2x}{-2}\geq \frac{-2}{-2} \text{ ή } \frac{-2x}{-2}\leq \frac{0}{-2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x\geq 1 \text{ ή } x\leq 0)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-2<x\leq 0 \text{ ή } 1\leq x<3 \Leftrightarrow x\in(-2,0]\cup[1,3)$$

Οι ακέραιες λύσεις είναι οι:

$$x=-1,\ x=0,\ x=1 \text{ και } x=2$$

1375

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$

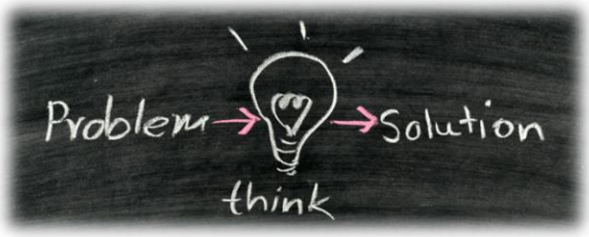
$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$\sqrt{5} \cong 2{,}24$

$\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)



α) Είναι:

- $\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cong 2\cdot 2{,}24 = 4{,}48$
- $\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cong 3\cdot 2{,}24 = 6{,}72$
- $\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cong 4\cdot 2{,}24 = 8{,}96$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}} = \frac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$$

1376

ΘΕΜΑ 2

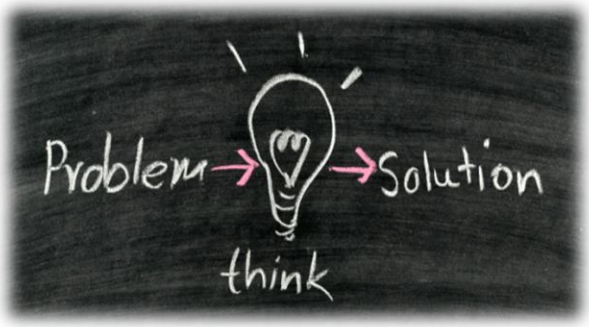
Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση *A* είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του *x*.

(Μονάδες 13)



α) Πρέπει:

$$(x-4\geq 0 \text{ και } x+1\geq 0)\Leftrightarrow(x\geq 4 \text{ και } x\geq -1)\Leftrightarrow x\geq 4\Leftrightarrow x\in[4,+\infty)$$

β) Είναι:

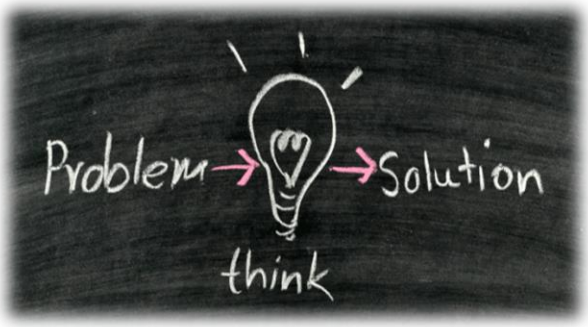
$$A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)=\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2=$$
$$=x-4-(x+1)=x-4-x-1=-5$$

1377

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)



α) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3^3}<\sqrt[3]{30}<\sqrt[3]{4^3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{30}<\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 27<30<64$, το οποίο ισχύει

β) Έστω ότι $\sqrt[3]{30}<6-\sqrt[3]{30}$. Τότε:

$$\sqrt[3]{30}<6-\sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30}<6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30}<3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{30}\right)^3<3^3 \Leftrightarrow 30<27, \text{ άτοπο}$$

Άρα $\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30}$.

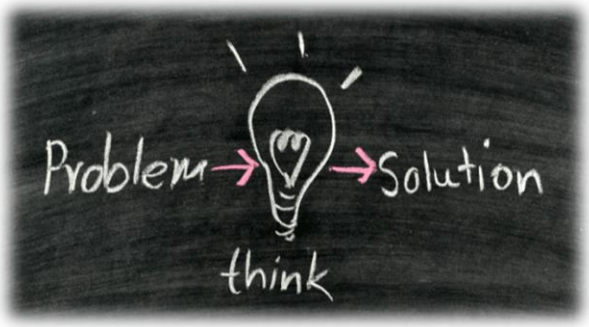
1378

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ (Μονάδες 12)



α) Πρέπει:

$$(x-4\geq 0 \text{ και } 6-x\geq 0)\Leftrightarrow(x\geq 4 \text{ και } -x\geq -6)\Leftrightarrow(x\geq 4 \text{ και } x\leq 6)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\leq x\leq 6\Leftrightarrow x\in[4,6]$$

β) Για $x=5$, είναι:

$$A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=1+1=2$$

Τότε:

$$A^2+A-6=2^2+2-6=4+2-6=0$$

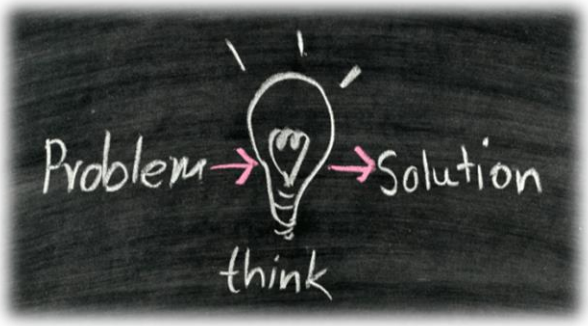
1379

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot(10-\sqrt{5})$ (Μονάδες 13)



α) Πρέπει:

$$(x^2+4\geq 0 \text{ και } x-4\geq 0)\Leftrightarrow(x\in\mathbb{R} \text{ και } x\geq 4)\Leftrightarrow x\geq 4\Leftrightarrow x\in[4,+\infty)$$

β) Για $x=4$, είναι:

$$A=\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{16+4}-\sqrt{0}=\sqrt{20}$$

Τότε:

$$A^2-A=\sqrt{20}^2-\sqrt{20}=20-\sqrt{4\cdot 5}=20-\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=$$
$$=20-2\sqrt{5}=2\left(10-\sqrt{5}\right)$$

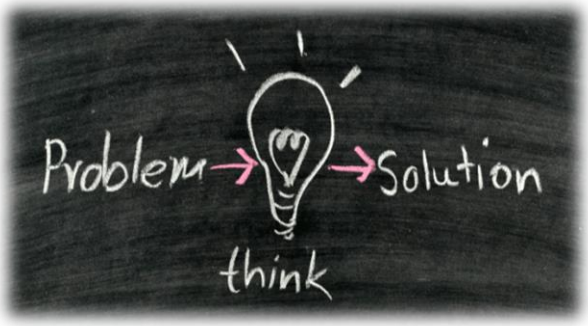
1380

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του *x* σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Αν *x*= -3, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$ (Μονάδες 12)



α) Πρέπει:

$$(1-x\geq 0 \text{ και } x^4\geq 0)\Leftrightarrow(-x\geq -1 \text{ και } x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow x\leq 1\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]$$

β) Για $x=-3$, είναι:

$$A=\sqrt{1-(-3)}-\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt{1+3}-\sqrt[4]{3^4}=\sqrt{4}-3=2-3=-1$$

Τότε:

$$A^3+A^2+A+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0$$

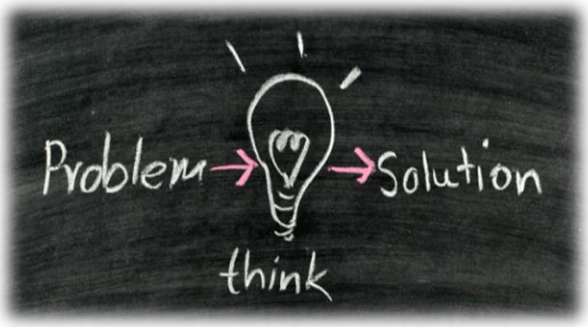
1381

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *B*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του *x* υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για *x=4*, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$ (Μονάδες 12)



α) Πρέπει:

$$(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty)$$

β) Για x = 4, είναι:

$$B=\sqrt[5]{(4-2)^5}=\sqrt[5]{2^5}=2$$

Τότε:

$$B^2+6B=2^2+6\cdot 2=4+12=16=2^4=B^4$$

1382

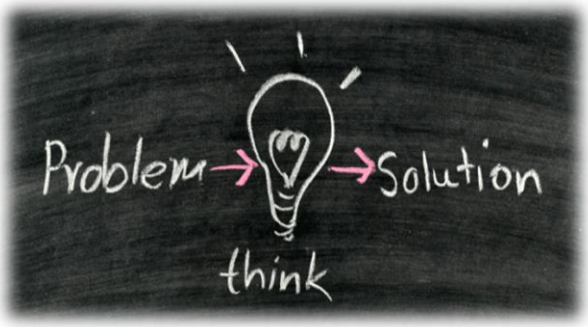
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2},\quad 1,\quad \sqrt[3]{2}$$ (Μονάδες 12)



α) Είναι:

$$A-B=\left(\sqrt{2}\right)^6-\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3-\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right]^2=$$
$$=2^3-2^2=8-4=4$$

β) Ισχύει ότι:

$$1<2\Leftrightarrow\sqrt[3]{1}<\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow 1<\sqrt[3]{2}\quad(1)$$

και

$$A-B=4>0\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}\right)^6>\left(\sqrt[3]{2}\right)^6\Leftrightarrow\sqrt{2}>\sqrt[3]{2}\quad(2)$$

Από τις ανισώσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$$

1383

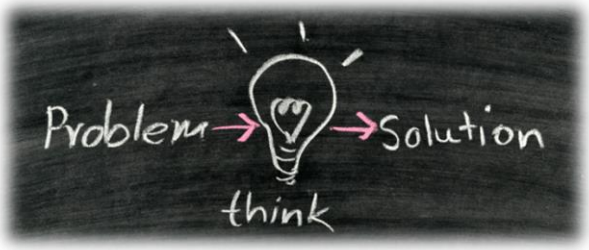
ΘΕΜΑ 2

Αν ο πραγματικός αριθμός *x* ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$ (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του *x*.

(Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$|x+1|<2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-1<x+1-1<2-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3<x<1 \Leftrightarrow x\in(-3,1)$$

β) Από το σκέλος (α) ισχύει ότι:

$$-3<x<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-3<x \text{ και } x<1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0<x+3 \text{ και } x-1<0)$$

Άρα:

$$|x+3|=x+3 \quad \text{και} \quad |x-1|=-(x-1)=1-x$$

Τότε:

$$K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}=\frac{x+3+1-x}{4}=\frac{4}{4}=1$$

1384

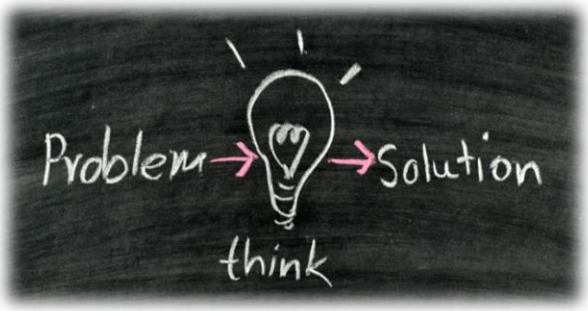
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$. (Μονάδες 12)

β) $0<A<4$. (Μονάδες 13)



α) Είναι:

$$1<x<4 \Leftrightarrow (1<x \text{ και } x<4) \Leftrightarrow (0<x-1 \text{ και } x<4)$$

Άρα $|x-1|=x-1$

Ισχύει ακόμη ότι:

$$2<y<3 \Leftrightarrow (2<y \text{ και } y<3) \Leftrightarrow (2<y \text{ και } y-3<0)$$

Άρα $|y-3|=-(y-3)=3-y$

Τότε:

$$A=|x-1|+|y-3|=x-1+3-y=x-y+2$$

β) Είναι $1<x<4$ (1) και:

$$2<y<3 \Leftrightarrow -2>-y>-3 \Leftrightarrow -3<-y<-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3+2<-y+2<-2+2 \Leftrightarrow -1<-y+2<0 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1-1<x-y+2<0+4 \Leftrightarrow 0<x-y+2<4$$

1385

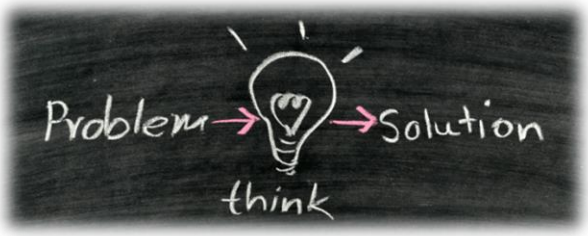
ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6. (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$. (Μονάδες 8)



α) Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει $\alpha=1$, $\beta=-5$, $\gamma=6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

Τότε:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

β) i) Πρέπει:

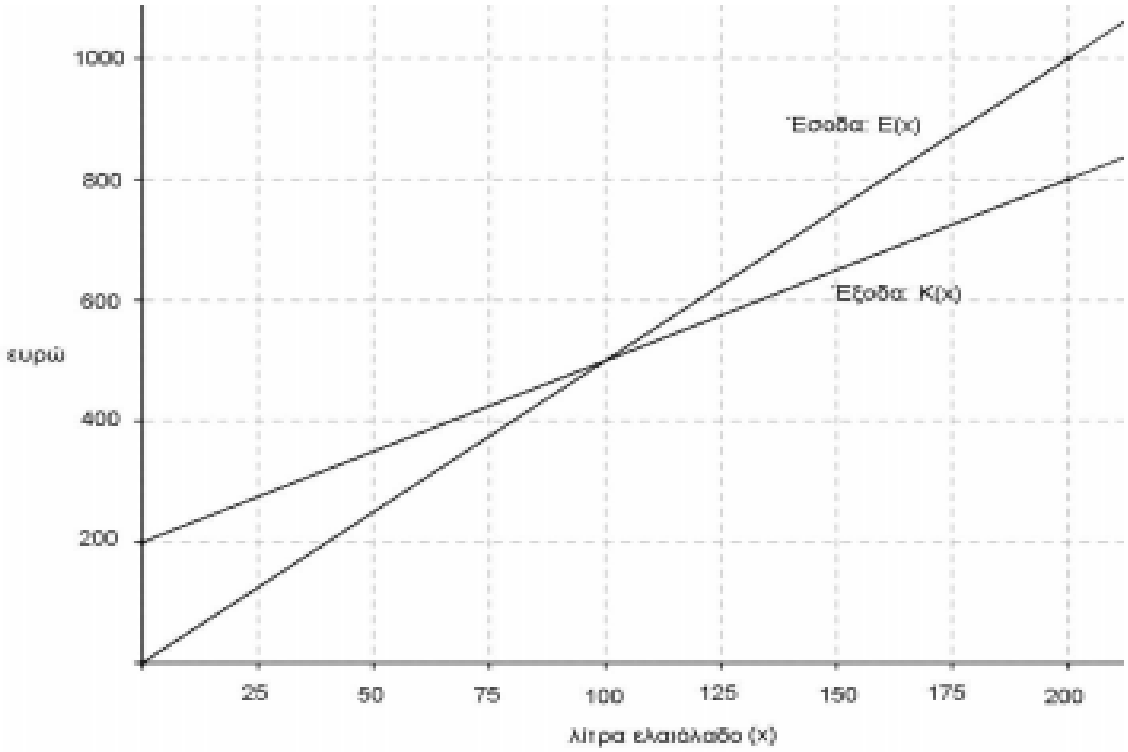
$$x^2-5x+6\neq0\Leftrightarrow(x-2)(x-3)\neq0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-2\neq0\ \text{ και }\ x-3\neq0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x\neq2\ \text{ και }\ x\neq3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{2,3\}$.

ii) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}=\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}$$

ΘΕΜΑ 4



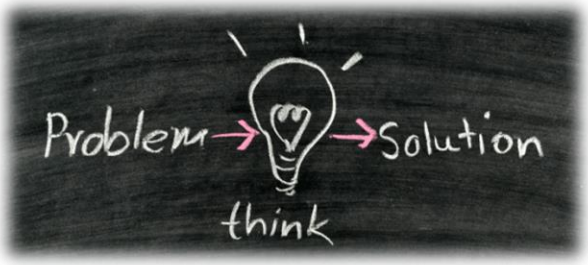
Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα *Κ(x)* και τα έσοδα *Ε(x)* από την πώληση *x* λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. (Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; (Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων Κ(x) και Ε(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 8)



1386

α) Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι το σημείο τομής των ευθειών είναι κατ' εκτίμηση το Α(100, 500).
Η ερμηνεία του είναι η εξής:
Αν η εταιρεία πουλήσει 100 λίτρα λάδι τα έσοδα και τα έξοδά της είναι 500 ευρώ, δηλαδή δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά.

β) Τα πάγια έξοδα της εταιρείας είναι 200 ευρώ, διότι Κ(0) = 200. Δηλαδή ακόμα κι αν δεν παραχθεί λάδι (x = 0), υπάρχουν έξοδα.

γ) Για να μην έχει η εταιρεία ζημιά πρέπει τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα ή μεγαλύτερα από αυτά. Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει για παραγωγή x ≥ 100 λίτρων λαδιού.

δ) Έστω $y = \alpha x$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ε) που περιγράφει τη συνάρτηση εσόδων Ε(x). Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο Α(200, 1000), οπότε:

$$1000 = 200\alpha \Leftrightarrow \alpha = 5$$

Τελικά η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

$$y = 5x$$

και η συνάρτηση των εσόδων είναι η Ε(x) = 5x, x ≥ 0

Έστω $y = \alpha_1 x + \beta_1$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ε_1) που περιγράφει τη συνάρτηση εξόδων Κ(x). Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από τα σημεία Β(0, 200) και Γ(200, 800) οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\alpha_1 = \frac{800-200}{200-0} = \frac{600}{200} = 3$$

Τότε η ευθεία (ε_1) γράφεται:

$$y = 3x + \beta_1$$

Επειδή η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το Β (0, 200) οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν, οπότε:

$$200 = 0 + \beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = 200$$

Τελικά η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση:

$$y = 3x + 200$$

και η συνάρτηση των εξόδων είναι η Κ(x) = 3x + 200, x ≥ 0

Για να μην έχει η εταιρεία ζημιά πρέπει:

$$E(x) \geq K(x) \Leftrightarrow$$

$$5x \geq 3x + 200 \Leftrightarrow$$

$$2x \geq 200 \Leftrightarrow$$

$$x \geq 100$$

Επομένως, η εκτίμηση που κάναμε στο σκέλος (γ) ήταν σωστή.

1387

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

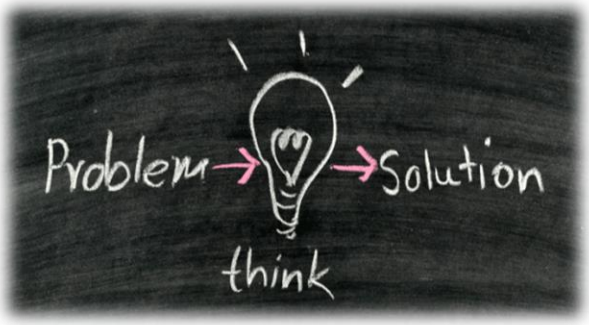
β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ) Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)



1387

α) Επειδή το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων ω, οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν), με $\alpha_1 = 16$ και διαφορά ω.

Είναι:

$$\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + (7-1)\omega = 28 \Leftrightarrow$$

$$16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow$$

$$6\omega = 12 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 2$$

Άρα $\alpha_1 = 16$ και $\omega = 2$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = 16 + (\nu-1)2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = 14 + 2\nu, \quad \text{με } 1 \le \nu \le 20$$

γ) Το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου είναι:

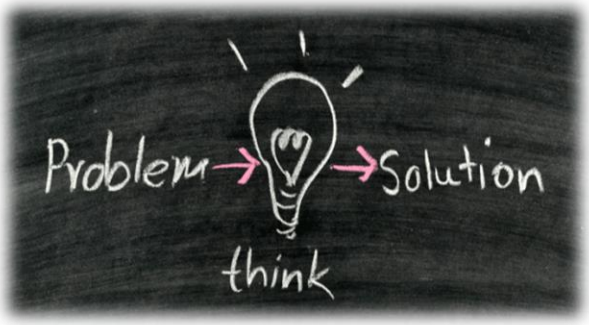
$$S_{20} = \frac{20}{2}[2\alpha_1 + (20-1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 10(2 \cdot 16 + 19 \cdot 2) \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 10(32 + 38) \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 10 \cdot 70 \Leftrightarrow$$

$$S_{20} = 700$$



1387

δ) Ο αριθμός των κενών καθισμάτων σε κάθε σειρά είναι αριθμητική πρόοδος (β_ν) με $\beta_1 = 6$ και $\omega' = 3$. Ο ν – οστός όρος που εκφράζει το πλήθος των κενών καθισμάτων είναι:

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\omega' \Leftrightarrow$$

$$\beta_\nu = 6 + (\nu - 1)3 \Leftrightarrow$$

$$\beta_\nu = 6 + 3\nu - 3 \Leftrightarrow$$

$\beta_\nu = 3 + 3\nu$, με $1 \leq \nu \leq 11$ (διότι τα κενά καθίσματα δεν μπορεί να είναι περισσότερα από τα καθίσματα της κάθε σειράς. Δηλαδή πρέπει $\beta_\nu \leq \alpha_\nu \Leftrightarrow \nu \leq 11$)

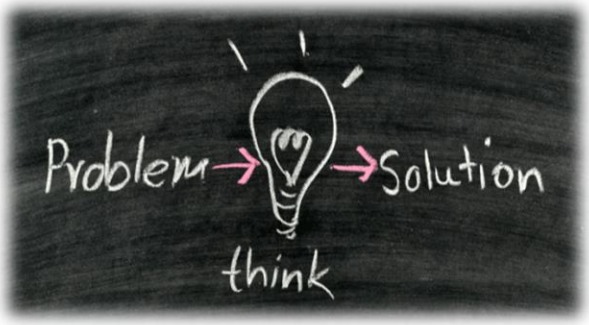
i) Όλα τα καθίσματα της ν-οστής σειράς θα είναι κενά, όταν:

$$\beta_\nu = \alpha_\nu \Leftrightarrow$$

$$3 + 3\nu = 14 + 2\nu \Leftrightarrow$$

$$\nu = 11$$

Άρα από την $11^{η}$ σειρά μέχρι και την $20^{η}$ όλα τα καθίσματα του θεάτρου είναι κενά.



1387

ii) Το πλήθος των κενών καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S'_{10} = \frac{10}{2}[2\beta_1 + (10-1)\omega'] \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5(2 \cdot 6 + 9 \cdot 3) \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5(12 + 27) \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5 \cdot 39 \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 195$$

Το πλήθος των καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2\alpha_1 + (10-1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5(2 \cdot 16 + 9 \cdot 2) \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5(32 + 18) \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5 \cdot 50 \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 250$$

Ο αριθμός των θεατών που κάθονται στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$$

Αυτός είναι και ο συνολικός αριθμός των θεατών αφού από την $11^{η}$ σειρά και μετά τα καθίσματα είναι κενά.

1388

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι $1^{ου}$ βαθμού. (Μονάδες 5)

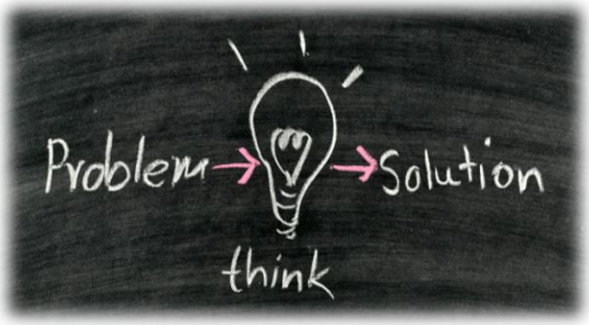
β) Αν η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο

$$(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$$

είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)



1388

α) Η εξίσωση είναι $1^{ου}$ βαθμού όταν

$$8-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=8$$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού για $\lambda \neq 8$. Για να έχει η εξίσωση αυτή μια διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow$$

$$[-2(\lambda-2)]^2-4\cdot(8-\lambda)\cdot 1=0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda-2)^2-4(8-\lambda)=0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2-4\lambda+4)-32+4\lambda=0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2-16\lambda+16-32+4\lambda=0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2-12\lambda-16=0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-3\lambda-4=0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2-3\lambda-4$ έχει διακρίνουσα $\Delta'=25$ και ρίζες τις

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{3+5}{2}=4\\ \frac{3-5}{2}=-1\end{cases}$$

- Για $\lambda=4$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8-4)x^2-2(4-2)x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2-4x+1=0$$

που έχει διπλή ρίζα την $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-(-4)}{2\cdot 4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

- Για $\lambda=-1$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8+1)x^2-2(-1-2)x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$9x^2+6x+1=0$$

που έχει διπλή ρίζα την $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-6}{2\cdot 9}=-\frac{1}{3}$

γ) Για $\lambda=4$ το τριώνυμο γράφεται:

$$(8-4)x^2-2(4-2)x+1=4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq 0,$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Για $\lambda=-1$ το τριώνυμο γράφεται:

$$(8+1)x^2-2(-1-2)x+1=9x^2+6x+1=(3x+1)^2\geq 0$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

1389

ΘΕΜΑ 4

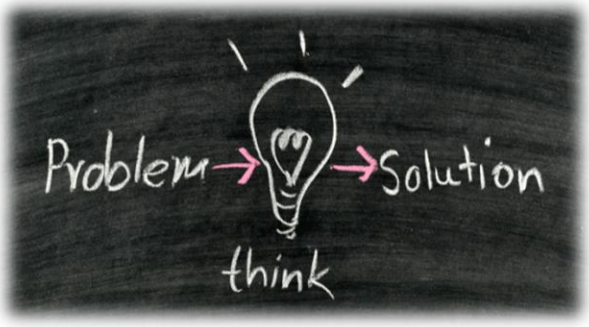
Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$,

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. (Μονάδες 9)

ii) να δείξετε ότι: $g(\alpha+3)>g(\alpha)$, όταν $\alpha\in(-1,1)\cup(1,2)$. (Μονάδες 7)



1389

α) Επειδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ οι αριθμοί -2 και 1 αποτελούν ρίζες του τριωνύμου του παρονομαστή. Τότε πρέπει:

$$1 + \kappa + \lambda = 0 \ (1) \ \text{ και } \ 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \ \ (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε:

$$3 - 3\kappa = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\kappa = 1$ στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$1 + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

β) i) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Τότε ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$.

Τότε το πρόσημο της g για $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ είναι:

- $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, 2)$
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, +\infty)$

Συνεπώς, όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, **$g(\alpha) < 0$**. Επίσης όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, το $(\alpha + 3) \in (2, 4) \cup (4, 5)$, οπότε **$g(\alpha + 3) > 0$.**

Άρα $g(\alpha + 3) > g(\alpha)$.

1390

ΘΕΜΑ 4

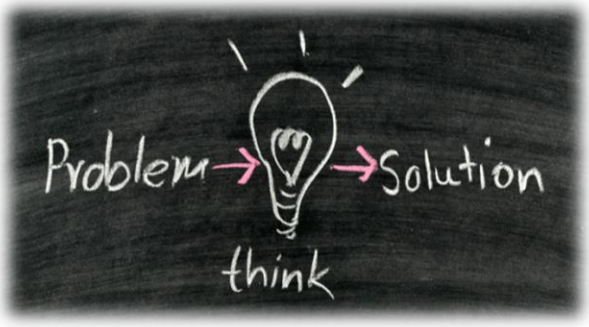
Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. (Μονάδες 9)

β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$:

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της g. (Μονάδες 9)

ii) Να δείξετε ότι $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$, όταν $\alpha, \beta \in (-1,1)\cup(1,2)$ (Μονάδες 7)



1390

α) Επειδή το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ οι αριθμοί -2 και 1 αποτελούν ρίζες του τριωνύμου του παρονομαστή. Τότε πρέπει:

$$1 + \kappa + \lambda = 0 \ (1) \ \text{ και } \ 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \ (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε:

$$3 - 3\kappa = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\kappa = 1$ στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$1 + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

β) i) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$ ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Τότε ο τύπος της g γράφεται:

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$. Τότε το πρόσημο της g για $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ είναι:

- $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, 2)$
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, +\infty)$

Επειδή $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$, προκύπτει ότι $g(\alpha) < 0$ και $g(\beta) < 0$.

Τελικά $g(\alpha)g(\beta) > 0$.

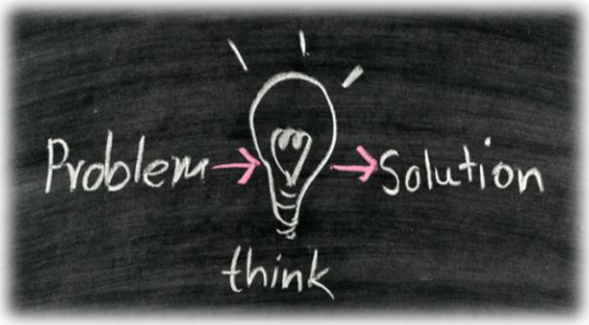
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)



1391

α) Το τριώνυμο $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 =$$

$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$

$$= (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

γ) Είναι $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$(\lambda < 0 \text{ και } \Delta \leq 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 \leq 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } \lambda^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$[\lambda < 0 \text{ και } (\lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 1)]$$

Άρα $\lambda = -1$.

ΘΕΜΑ 4

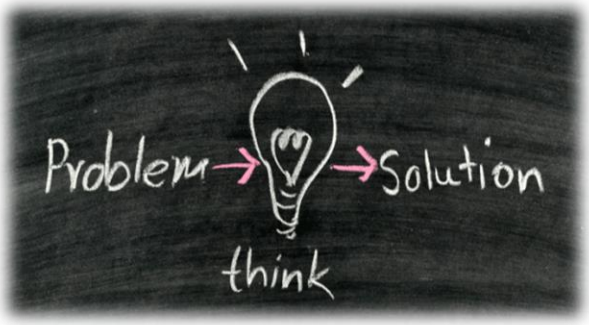
Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)



1392

Η επιφάνεια, σε τετραγωνικά μίλια, που καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = 2$. Στο τέλος της ν-οστής ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια $\alpha_\nu = 3\cdot 2^{\nu-1}$ τετραγωνικά μίλια (τ.μ.).

α) Στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια: $\alpha_5 = 3\cdot 2^{5-1} = 3\cdot 2^4 = 3\cdot 16 = 48$ τ.μ.

β) Δεδομένο είναι ότι $\alpha_\nu = 768$ και ζητούμενο είναι το ν. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha_\nu = 768$$

$$3\cdot 2^{\nu-1} = 768$$

$$2^{\nu-1} = 256$$

$$\nu - 1 = 8 \qquad (2^8 = 256)$$

$$\nu = 9$$

Οπότε στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας θα έχει καλυφθεί από πετρέλαιο θαλάσσια επιφάνεια 768 τ.μ.

γ) Στο τέλος της $10^{ης}$ ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που έχει καλυφθεί από πετρέλαιο είναι 768 - 6 = 762 τ.μ. και κάθε επόμενη ημέρα θα μειώνεται κατά 6 τ.μ. Άρα η επιφάνεια, σε τετραγωνικά μίλια, που θα καλύπτει εφεξής το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 762$ και $\omega = -6$.

Δεδομένο είναι ότι $\beta_\nu = 12$ και ζητούμενο είναι το ν. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\beta_\nu = 12$$

$$762 + (\nu - 1)\cdot(-6) = 12$$

$$6\nu = 756$$

$$\nu = 126$$

Συνεπώς στο τέλος της $126^{ης}$ ημέρας μετά την κρατική παρέμβαση και συνολικά στο τέλος της $9 + 126 = 135^{ης}$ ημέρας μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1, x\in\mathbb{R}$

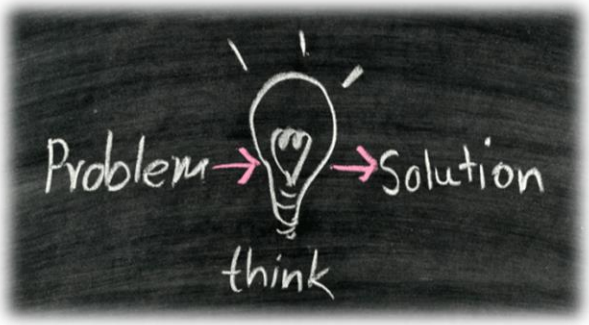
α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + \alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)



1393

α) Οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f, C_g αποτελούν λύσεις της εξίσωσης f(x) = g(x). Τότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1$$

Άρα οι C_f, C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, το A(– 1, g(– 1)) δηλαδή το A(– 1, 0) (η ευθεία εφάπτεται της παραβολής).

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_h είναι λύσεις της εξίσωσης f(x) = h(x). Δηλαδή:

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x + 2 = x + \alpha \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + (2 - \alpha) = 0 \text{ , } \alpha \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \alpha) = 4 - 8 + 4\alpha = 4\alpha - 4 = 4(\alpha - 1)$$

i) Αν α > 1, τότε Δ > 0 και η η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν α < 1, τότε Δ < 0 και η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

1394

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

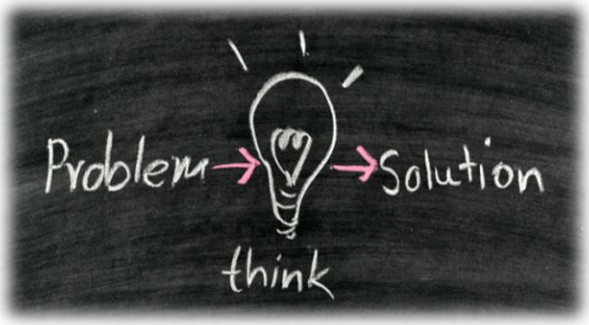
α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. (Μονάδες 6)

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν. (Μονάδες 6)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)



1394

Τα βακτήρια (το πλήθος τους) στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου (α_v) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 102400$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

α) Ο ν – στός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_v = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{v-1}$$

Μετά από 6 ώρες ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι:

$$\alpha_6 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200$$

β)

i) Μετά την ξαφνική επιδείνωση του οργανισμού ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Άρα η ακολουθία (β_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = 3$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 3200 \cdot 3 = 9600$

ii) Είναι

$$\beta_v = \beta_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow$$

$$\beta_v = 9600 \cdot 3^{v-1}, v \leq 5$$

iii) Ο αριθμός των βακτηρίων που θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης θα είναι:

$$\beta_3 = 9600 \cdot 3^{3-1} = 9600 \cdot 3^2 = 86.400$$

ΘΕΜΑ 4

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των *21 €* ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο *30* μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει *51* θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει *3€* και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει *0,5€* περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

(Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

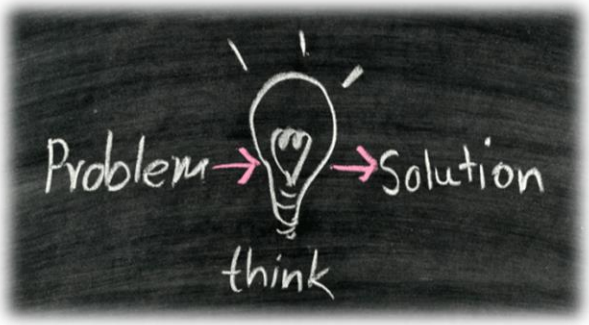
(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των *21 €* ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)



1395

Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει 3 + 0,5 = 3,5€, ο τρίτος θα πληρώσει 3,5 + 0,5 =4€ και ο τέταρτος θα πληρώσει 4 + 0,5 = 4,5€.

β) Δεδομένου ότι ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο, οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 0,5$.

γ) Ο $51^{ος}$ επιβάτης θα πληρώσει: $\alpha_{51} = 3 + (51 - 1)\cdot 0,5 = 28$€

δ) Ζητάμε την μικότερη τιμή του φυσικού αριθμού ν ώστε $S_\nu > 30\cdot 21$. Οπότε έχουμε ισοδύναμα:

$$S_\nu > 30\cdot 21$$

$$\frac{\nu}{2}\left[2\cdot 3+(\nu-1)\cdot 0,5\right] > 630$$

$$\frac{\nu}{2}\left[6+\frac{(\nu-1)}{2}\right] > 630$$

$$\frac{\nu}{2}\left[\frac{12+\nu-1}{2}\right] > 630$$

$$\frac{\nu(11+\nu)}{4} > 630$$

$$\nu^2+11\nu-2520 > 0 \qquad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 11^2 - 4(-2520) = 10201$ και ρίζες $\nu = 45$, $\nu = -56$ (απορρίπτεται). Η (1) αληθεύει για φυσικούς αριθμούς $\nu > 45$. Συνεπώς πρέπει να πουληθούν τουλάχιστον 46 εισιτήρια ώστε να συμφέρει η προσφορά.

1396

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

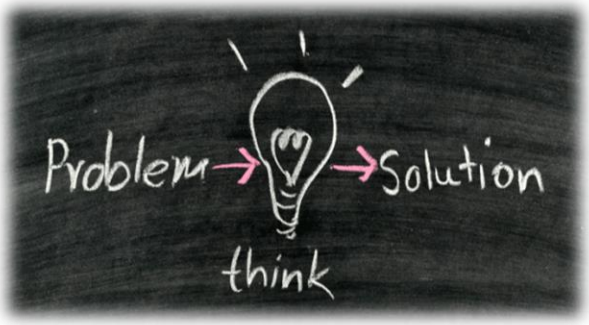
β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

(Μονάδες 5)



1396

α) Για λ = 5 η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 25 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή.

β) Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει διπλή ρίζα, αν και μόνο αν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-2\lambda)^2 - 4(4\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -1$$

Συνεπώς και για λ = -1 η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

γ) Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες, αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 5$$

δ) Αν

$$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \qquad \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\},$$

τότε $\lambda^2 - 4\lambda - 5 < 0$, δηλαδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$ είναι αρνητική, οπότε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

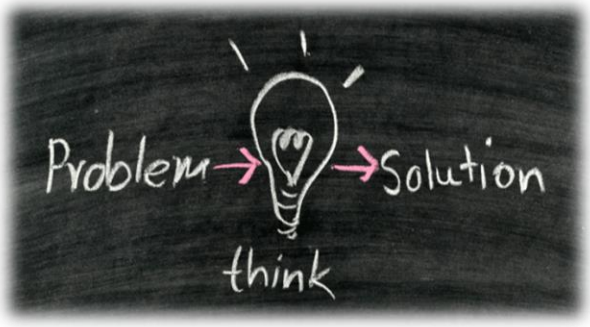
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2, με $x_1<x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1<\kappa<x_2<\mu$.

(Μονάδες 6)



1397

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$

Επειδή $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$, το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Το τριώνυμο έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2+1)$ και $\gamma = \lambda$. Οπότε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-[-(\lambda^2+1)]}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι $P = 1 > 0$, άρα οι ρίζες του είναι ομόσημες. Αν επιπλέον $\lambda > 0$, τότε και $S > 0$. Οπότε οι ρίζες θα είναι θετικές (δυο ομόσημοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα είναι θετικό, είναι θετικοί).

δ) Για **$\lambda > 0$** και **$\lambda \neq 1$** το τριώνυμο f(x) έχει δυο ρίζες άνισες τις x_1 και x_2 που λόγω του γ) ερωτήματος είναι θετικές. Επίσης είναι δεδομένο ότι κ και μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$0 < x_1 < \kappa < x_2 < \mu$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, που έχει

$$\alpha = \lambda > 0$$

x	$-\infty$		0		x_1		κ		x_2		μ		$+\infty$
$f(x)$			$+$		0		$-$		0		$+$		

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου προκύπτει λοιπόν ότι:

f(0) > 0

f(κ) < 0

f(μ) > 0

Άρα: $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu) < 0$

1398

ΘΕΜΑ 4

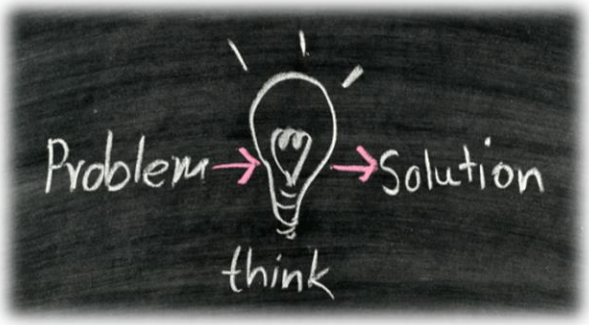
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το Α(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox. (Μονάδες 7)



1398

α) Τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x΄x τις βρίσκουμε λύνοντας την εξίσωση g(x) = 0. Τότε:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα A(– 3, 0) και B(3, 0).

β) Είναι:

$f(3) = 4 \cdot 3 + 2 = 14 \neq 0$ και

$f(-3) = 4 \cdot (-3) + 2 = -10 \neq 0$

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3, 0) και (– 3, 0).

γ) Έστω ότι υπάρχει κοινό σημείο $(x_0, 0)$ του άξονα x΄x στο οποίο τέμνονται οι C_f, C_g. Τότε ισχύει:

$$(f(x_0) = 0 \text{ και } g(x_0) = 0) \Leftrightarrow$$

$$(4x_0 + 2 = 0 \text{ και } x_0^2 - 9 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\left(x_0 = -\frac{1}{2} \text{ και } x_0 = \pm 3\right)$$

που είναι άτοπο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα x΄x.

Έστω οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα y΄y. Τότε πρέπει:

$$f(0) = g(0) \Leftrightarrow 2 = -9$$

που είναι άτοπο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα y΄y.

δ) Επειδή η γραφική παράσταση της h είναι ευθεία, η εξίσωση της θα έχει τη μορφή

$$h(x) = \alpha x + \beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Επειδή η γραφική παράσταση της h διέρχεται από το σημείο A(0, 3) ισχύει ότι:

$$h(0) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot 0 + \beta = 3 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 3$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας γίνεται:

$$h(x) = \alpha x + 3, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Επίσης η γραφική παράσταση της h τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox οπότε ισχύει:

$$h(3) = g(3) \Leftrightarrow 3\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση έχει τύπο $h(x) = -x + 3$.

1399

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

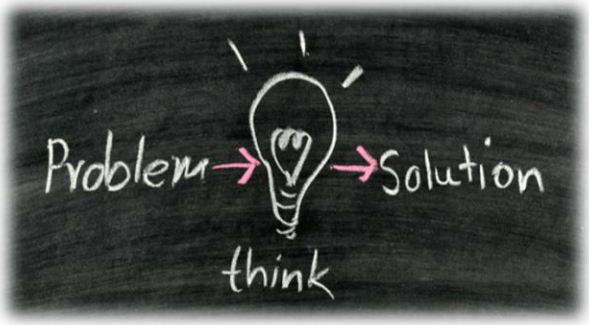
$$\alpha_1 = x, \qquad \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4, \qquad \alpha_3 = x^2 - 2, \qquad \text{όπου } x \in \mathbb{Z},$$

τότε,

α) να αποδειχθεί ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 . (Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)



1399

α) Ισχύει ότι: $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 \Leftrightarrow$

$$(2x^2 - 3x - 4) - x = (x^2 - 2) - (2x^2 - 3x - 4) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 3$ ή $x = -\frac{2}{3}$ (απορρίπτεται γιατί δεν είναι ακέραιος)

Άρα $x = 3$ και οι τρεις πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$ και $\alpha_3 = 7$

β) Η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 2$. Άρα ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 3 + (\nu - 1)\cdot 2 = 2\nu + 1$

Αν υπάρχει όρος της προόδου ίσος με 2014 θα πρέπει η εξίσωση $\alpha_\nu = 2014$ να έχει λύση φυσικό αριθμό.

Έχουμε λοιπόν: $\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow$

$$2\nu + 1 = 2014 \Leftrightarrow$$

$\nu = \frac{2013}{2} = 1006,5$ που δεν είναι φυσικός αριθμός

Άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

γ) $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15} = 3 + 7 + 11 + \ldots + 31$

Οι όροι του αθροίσματος είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 3$ και $\omega' = 4$. Πρέπει να βρούμε το πλήθος τους. Έχουμε $\beta_\nu = 31 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)\cdot 4 = 31 \Leftrightarrow 4\nu = 32 \Leftrightarrow \nu = 8$. Οπότε το πλήθος των όρων είναι 8.

Οπότε $S = S_8 = \frac{8}{2}\left[2\cdot 3 + (8-1)\cdot 4\right] = 136$

ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου.

Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

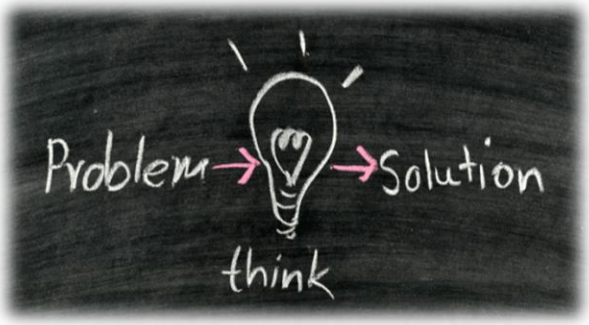
β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



1400

α) Εάν η εταιρεία δεν κατασκευάζει μπλουζάκια, θέτουμε x = 0 στη συνάρτηση K(x) = 12,5x + 120 και βρίσκουμε K(0) = 120 €.

Επομένως η εταιρεία χωρίς να κατασκευάζει μπλουζάκια έχει (πάγια) έξοδα 120 €.

β) Η μοναδιαία μεταβολή στο x, δηλαδή αν τα μπλουζάκια που κατασκευάζονται αυξηθούν κατά 1 (από *x* γίνουν x + 1), θα προκαλέσει σταθερή μεταβολή 12,5 ευρώ στο κόστος κατασκευής και σταθερή μεταβολή στα έσοδα 15,5 ευρώ. Δηλαδή K(x + 1) – K(x) = 12,5 και E(x+1) – E(x) = 15,5.

γ) Τα μπλουζάκια που πρέπει να πωληθούν ώστε τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα είναι η λύση της εξίσωσης:

$$E(x) = K(x) \Leftrightarrow$$

$$15{,}5x = 12{,}5x + 120 \Leftrightarrow$$

$$3x = 120 \Leftrightarrow$$

$$x = 40$$

Άρα πρέπει να παραχθούν 40 μπλουζάκια ώστε η επιχείρηση να «μην μπαίνει μέσα».

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια, τα έσοδα θα είναι:

$$E(60) = 15{,}5 \cdot 60 = 930 \text{ €}$$

και τα έξοδα:

$$K(60) = 12{,}5 \cdot 60 + 120 = 870 \text{ €}$$

Άρα το κέρδος τους θα είναι 930 – 870 = 60 €

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

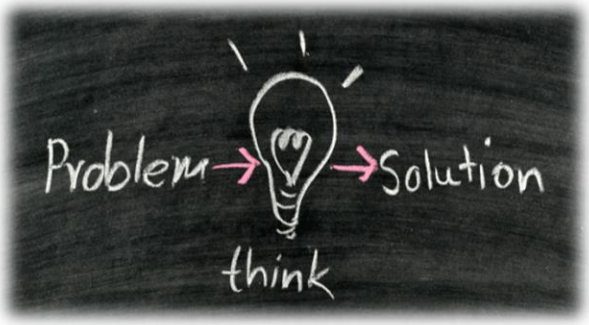
$$\Delta = 4\lambda^2-12\lambda-16.$$ (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}\ .$$ (Μονάδες 8)



1402

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2(\lambda - 1)x + (\lambda + 5)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2(\lambda - 1)$, $\gamma = \lambda + 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-2(\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda + 5) = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda - 20 = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 > 0 \qquad (2)$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ έχει διακρίνουσα: $\Delta_0 = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες τις:

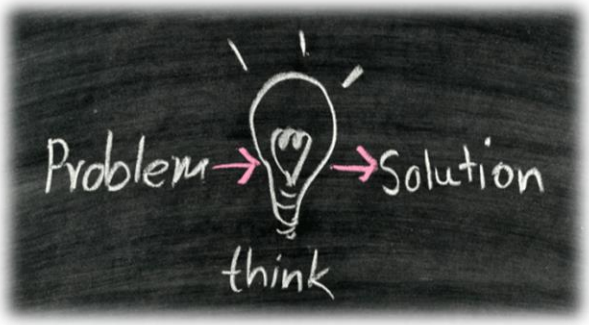
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\lambda^2 - 3\lambda - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως η (2) αληθεύει για:

$$\lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 4$$



1402

γ) Από τους τύπους Vieta για το τριώνυμο της εξίσωσης (1) βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2(\lambda-1)}{1} = 2(\lambda - 1) \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda+5}{1} = \lambda + 5$$

Τότε, για $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{24} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2|^2 = \sqrt{24}^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$[2(\lambda - 1)]^2 - 4(\lambda + 5) = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda - 20 - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 40 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -2$$

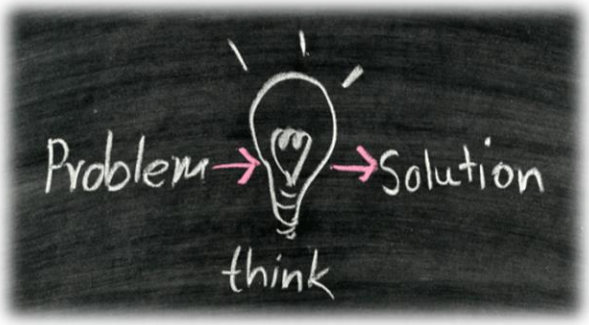
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B. (Μονάδες 8)



1403

α) Πρέπει:

$$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Άρα $A_f = (-3, 3)$

β) Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη $y = 0$, δηλαδή:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \frac{0+2}{\sqrt{9-0}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

γ) Έστω (ε): $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α, Β είναι:

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{2}{3} - 0}{0-(-2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας γράφεται:

$$(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \beta$$

Επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(-2, 0)$, οι συντεταγμένες του σημείου την επαληθεύουν. Ισχύει δηλαδή ότι:

$$0 = \frac{1}{3}(-2) + \beta \Leftrightarrow$$

$$0 = -\frac{2}{3} + \beta \Leftrightarrow$$

$$\beta = \frac{2}{3}$$

Τελικά η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

1404

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0 \qquad (1)\,,$$ με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

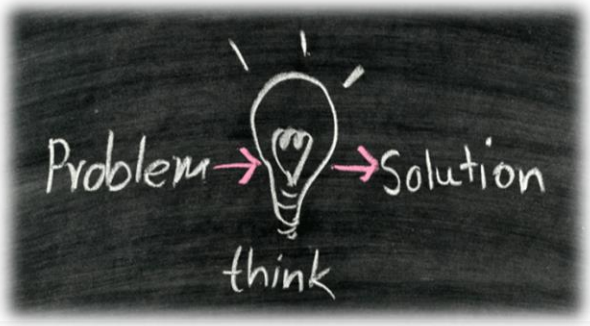
$$\Delta=12\lambda+25$$ (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1 \cdot x_2$. (Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση :

$$(x_1+x_2-1)^2+(x_1 \cdot x_2+3)^2=0$$ (Μονάδες 8)



1404

α) Το τριώνυμο $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2$ έχει

$$\alpha = \lambda + 2,\ \beta = 2\lambda + 3,\ \gamma = \lambda - 2$$

και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda + 3)^2 - 4 \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 2) = 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 - 4(\lambda^2 - 2^2) = 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 - 4\lambda^2 + 16 = 12\lambda + 25$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$12\lambda + 25 > 0 \Leftrightarrow$$

$$12\lambda > -25 \Leftrightarrow$$

$$\lambda > -\frac{25}{12}$$

Επειδή επιπλέον πρέπει $\lambda \neq -2$, τελικά βρίσκουμε:

$$\lambda \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (-2, +\infty)$$

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda-2}{\lambda+2}$$

δ) Για $\lambda \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (-2, +\infty)$, είναι:

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(S - 1)^2 + (P + 3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(S - 1 = 0 \ \text{και}\ P + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(S = 1 \ \text{και}\ P = -3) \quad \overset{(\gamma)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} = 1 \ \text{και}\ \frac{\lambda-2}{\lambda+2} = -3\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$(-(2\lambda + 3) = \lambda + 2 \ \text{και}\ \lambda - 2 = -3(\lambda + 2)) \quad \Leftrightarrow$$

$$(-2\lambda - 3 = \lambda + 2 \ \text{και}\ \lambda - 2 = -3\lambda - 6) \quad \Leftrightarrow$$

$$(-3\lambda = 5 \ \text{και}\ 4\lambda = -4) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda = -\frac{5}{3} \ \text{και}\ \lambda = -1\right)$$

Επομένως δεν υπάρχει τιμή του λ που να ικανοποιεί τη δοσμένη σχέση.

1406

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha+1)x + 4+\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\alpha - 1)^2 - 16.$$

(Μονάδες 5)

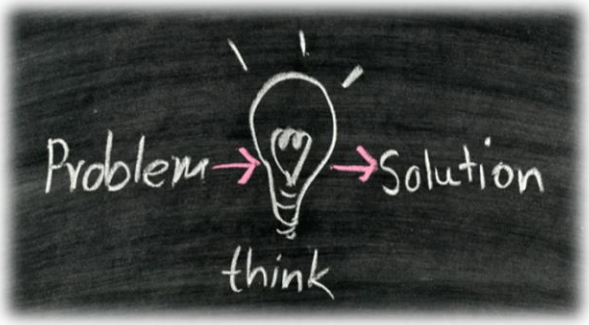
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2, τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α (Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$ (Μονάδες 8)



1406

α) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha + 1)x + 4 + \alpha$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = [-(\alpha + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 + \alpha) = (\alpha + 1)^2 - 4(4 + \alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 16 - 4\alpha = (\alpha^2 - 2\alpha + 1) - 16 =$

$=(\alpha - 1)^2 - 16$

β) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha + 1)x + 4 + \alpha$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)^2 - 16 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)^2 > 16 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha - 1)^2} > \sqrt{16} \Leftrightarrow$$

$$|\alpha - 1| > 4 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1 < -4 \text{ ή } \alpha - 1 > 4) \Leftrightarrow$$

$$\alpha < -3 \text{ ή } \alpha > 5$$

γ) i) Είναι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-(\alpha+1)}{1} = \alpha + 1 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{4+\alpha}{1} = 4 + \alpha$$

ii) Ισχύει ότι:

$d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = |x_1 - 1| \cdot |x_2 - 1| = |(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1)| = |x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1| = |P - S + 1| =$

$=|4 + \alpha - \alpha - 1 + 1| = 4$

ΘΕΜΑ 4

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B$$

$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και}$$

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|.$$

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

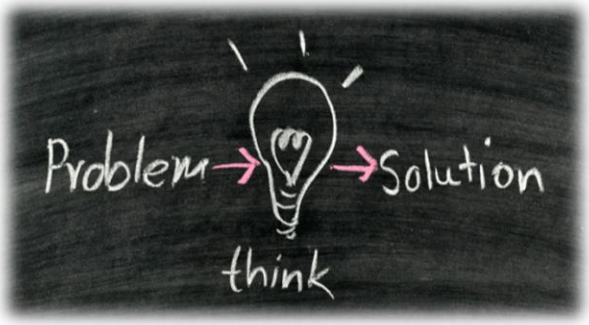
β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \quad \text{και} \quad t_A \cdot t_B = 8$$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (Μονάδες 5)



1407

α) i) Ισχύει ότι:

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \quad \Leftrightarrow$$

$$(t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \text{ ή } t_A - t_\Delta = -(t_B - t_\Delta)) \quad \Leftrightarrow$$

$$(t_A = t_B, \text{ απορρίπτεται ή } t_A - t_\Delta = -t_B + t_\Delta) \quad \Leftrightarrow$$

$$(t_A + t_B = 2t_\Delta) \quad \Leftrightarrow$$

$$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$$

ii) Είναι:

$t_\Gamma - t_B = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \frac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \frac{t_A - t_B}{3} < 0.$ Άρα $t_\Gamma < t_B$ (1)

Ισχύει ότι:

$t_\Delta - t_\Gamma = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{3} = = \frac{3t_A + 3t_B - 2t_A - 4t_B}{6} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0.$ Άρα $t_\Delta < t_\Gamma$ (2)

Έχουμε:

$t_A - t_\Delta = t_A - \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2t_A - t_A - t_B}{2} = \frac{t_A - t_B}{2} < 0.$ Άρα $t_A < t_\Delta$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) βρίσκουμε:

$$t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B$$

Επομένως, 1ος τερμάτισε ο Αργύρης, 2ος ο Δημήτρης, 3ος ο Γιώργος και 4ος ο Βασίλης.

β) i) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $t^2 - St + P = 0$ με $S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A \cdot t_B = 8$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η: $t^2 - 6t + 8 = 0$

ii) Η εξίσωση $t^2 - 6t + 8 = 0$ έχει ρίζες $t_A = 2$ λεπτά και $t_B = 4$ λεπτά (επειδή $t_A < t_B$).

Επομένως:

$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ λεπτά και

$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{10}{3}$ λεπτά

1408

ΘΕΜΑ 4

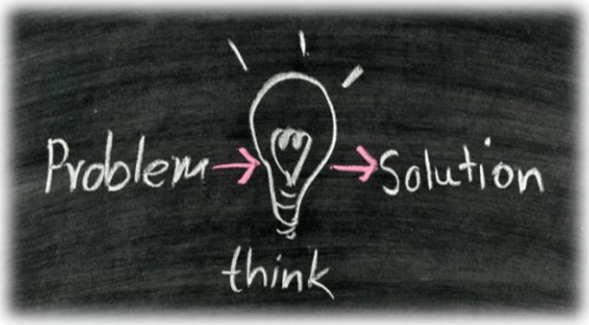
Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$

και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$. (Μονάδες 9)



1408

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \lambda x + (1 - \lambda) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \lambda x + (\lambda - 1) = 0 \qquad (1)$$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές, οπότε οι C_f, C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Η (1) έχει μια ρίζα διπλή, δηλαδή οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda$$

Τότε, για $\lambda \neq 2$ έχουμε:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = |\lambda| + 2 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0 \qquad (2)$$

Θέτουμε $|\lambda| = \alpha > 0$ και η εξίσωση (2) γράφεται: $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ με ρίζες $\alpha = 2$, $\alpha = -1$ (απορρίπτεται).
Άρα:

$$|\lambda| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Οπότε $\lambda = -2$.

ΘΕΜΑ 4

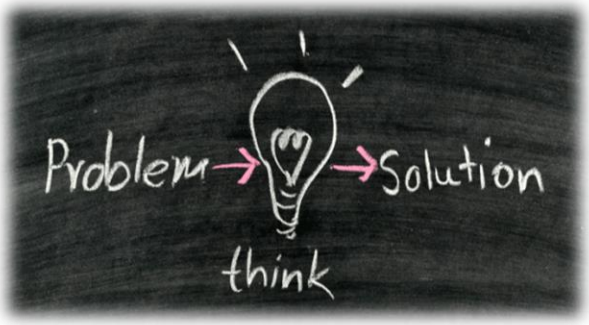
Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 60t - 5t^2$$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175$ m; (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m. (Μονάδες 9)



1409

α) Όταν η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος θα ισχύει:

$$y = 0 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5t(12 - t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 0 \text{ ή } t = 12$$

Για t = 0sec η σφαίρα βρίσκεται στην αρχή της κίνησης οπότε απορρίπτεται. Άρα η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος μετά από t = 12sec.

β) Ισχύει ότι:

$$y = 175 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 = 175 \Leftrightarrow$$

$$5t^2 - 60t + 175 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 35 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 5 \text{ ή } t = 7$$

Άρα η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος 175m τις χρονικές στιγμές 5 sec και 7 sec.

γ) Η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m όταν:

$$y > 100 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow$$

$$-5t^2 + 60t - 100 > 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 20 < 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$t^2 - 12t + 20$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$t^2 - 12t + 20 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 10$$

Άρα η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m μεταξύ των χρονικών στιγμών 2 sec και 10 sec.

ΘΕΜΑ 4

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

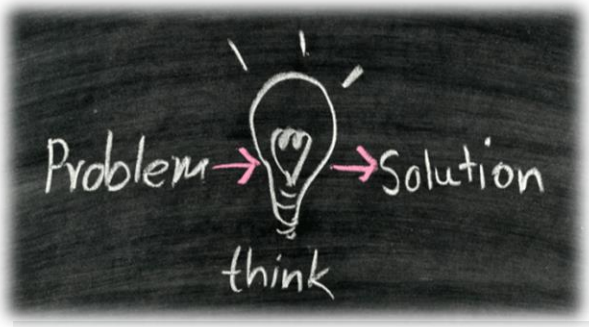
α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. (Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$ (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i),στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. (Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 9)



1410

α) Ο αθλητής, όταν κολυμπάει ύπτιο, καίει 9 θερμίδες το λεπτό. Άρα σε 32 λεπτά θα έχει κάψει $9 \cdot 32 = 288$ θερμίδες.

Ο αθλητής, όταν κολυμπάει πεταλούδα, καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Αν υποθέσουμε ότι κολυμπάει με αυτό το στυλ x λεπτά, τότε θα κάψει $12 \cdot x$ θερμίδες. Επειδή ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες, ισχύει ότι:

$$288 + 12x = 360 \Leftrightarrow$$

$$12x = 72 \Leftrightarrow$$

$x = 6$ λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα.

β) i) Έστω x ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο και y ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα. Τότε, για να κάψει 360 θερμίδες κολυμπώντας και με τα δύο στυλ, πρέπει να ισχύει:

$$9x + 12y = 360 \quad \Leftrightarrow$$

$$12y = 360 - 9x \quad \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{360}{12} - \frac{9x}{12} \quad \Leftrightarrow$$

$$y = 30 - \frac{3}{4}x$$

Άρα: $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$

ii) Επειδή τα x, f(x) είναι μεταβλητές χρόνου, πρέπει $\mathbf{x \geq 0}$ και $f(x) \geq 0$.

Τότε:

$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$30 - \frac{3}{4}x \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4}x \leq 30 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x \leq 120 \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{x \leq 40}$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι: $A_f = [0, 40]$

γ) Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο της με τεταγμένη $y = 0$, δηλαδή:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$30 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow$$

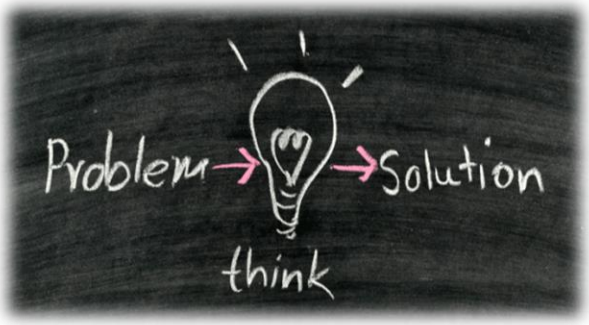
$$3x = 120 \Leftrightarrow$$

$$x = 40$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(40, 0).

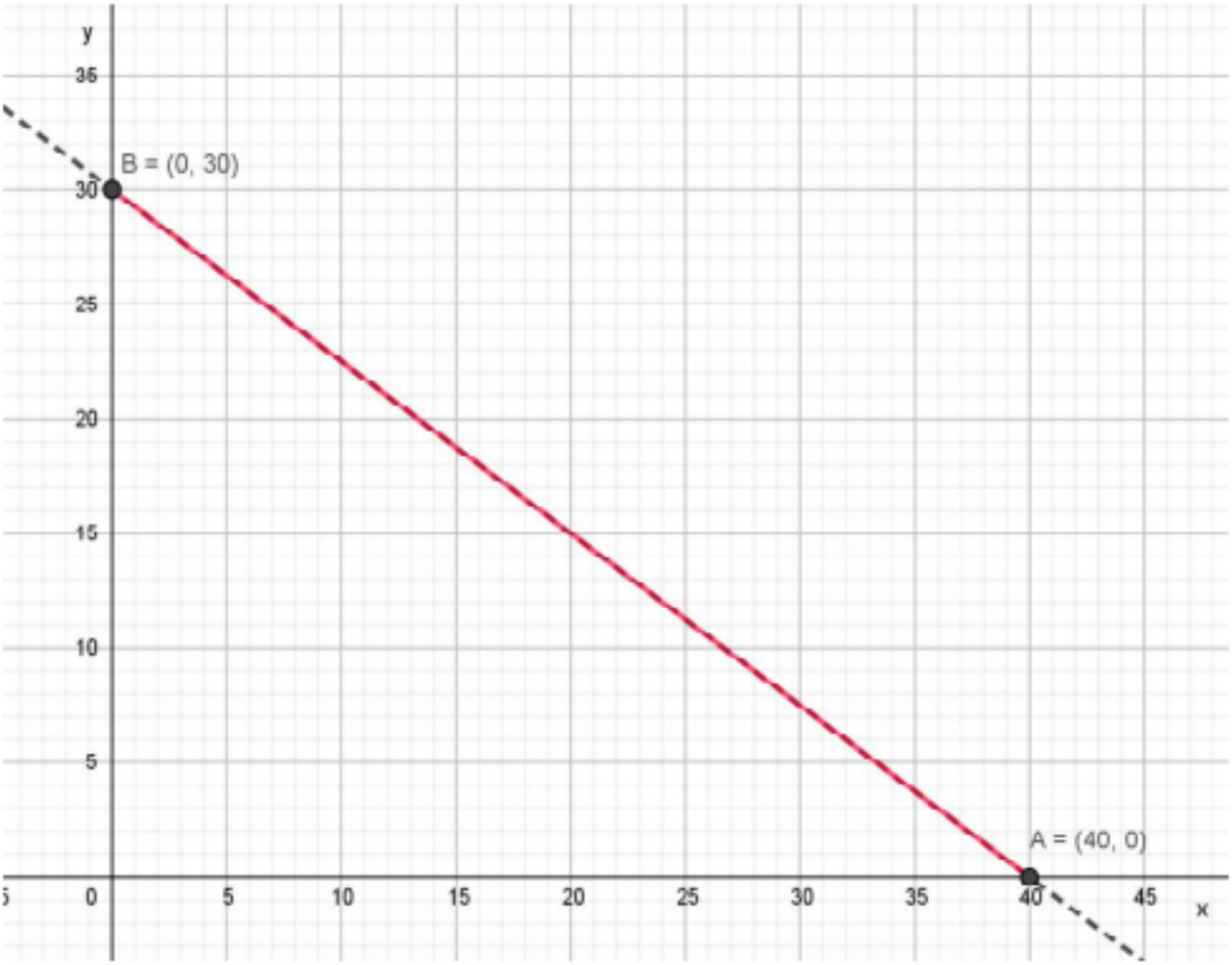
Επίσης έχουμε: $f(0) = 30 - \frac{3}{4} \cdot 0 = 30$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B(0, 30).



1410

Η γραφική παράσταση της f είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (τμήμα της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α, Β). Επομένως είναι:



Το σημείο Α δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει πεταλούδα χρειάζεται 40 λεπτά ύπτιο για να κάψει 360 θερμίδες ενώ το σημείο Β δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει ύπτιο χρειάζεται 30 λεπτά πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

ΘΕΜΑ 4

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

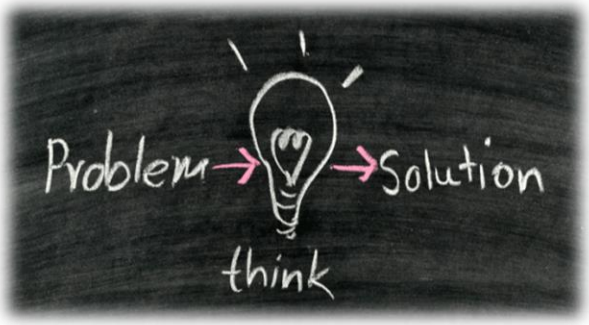
α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το $\nu^{ο}$ όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η $20^{η}$ κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την $3^{η}$ κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)



1411

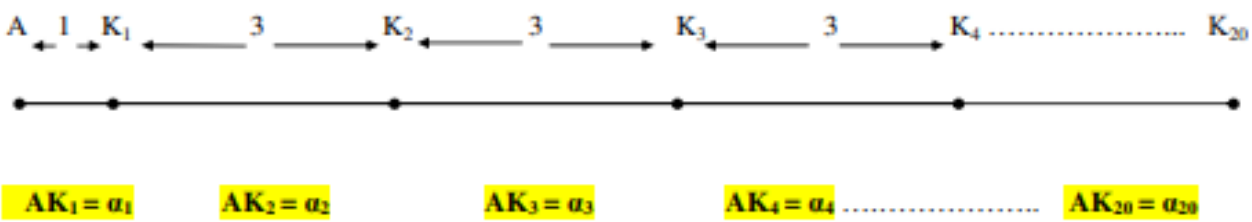
α) Οι αποστάσεις (α_i), $i = 1, 2, \ldots, 20$ των κυψελών $K_1, K_2, K_3, K_4, \ldots, K_{20}$ από την αποθήκη Α διαφέρουν πάντα κατά τον σταθερό αριθμό 3. Αποτελούν επομένως διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ (η απόσταση της κυψέλης K_1 από την αποθληκη Α) και διαφορά $\omega = 3$.

Ο $\nu^{ος}$ όρος της προόδου είναι :

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

$$\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)\cdot 3$$

$$\alpha_\nu = 3\nu - 2$$



β) Αναζητούμε τον όρο α_{20}.

$$\alpha_{20} = 3\cdot 20 - 2 = 58$$

Επομένως η 20η κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α απόσταση 58 m.

γ) i) Η διαδρομές που θα κάνει ο μελισσοκόμος είναι:

$$A \to K_1 \to A, \quad A \to K_2 \to A, \quad A \to K_3 \to A$$

Άρα θα διανύσει:

$$(1 + 1) + (4 + 4) + (7 + 7) = 24 \text{ μέτρα}$$

ii) Η συνολική απόσταση μέχρι να πάει την 20η κυψέλη είναι S_{20}. Επομένως για να γυρίσει πρέπει να διανύσει πάλι απόσταση S_{20}. Τελικά η ζητούμενη συνολική απόσταση είναι:

$$2S_{20} = 2 \cdot \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 20(1 + 58) = 20 \cdot 59 = 1.180 \text{ μέτρα}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2-\lambda\right)\cdot x^2-\left(\lambda^2-1\right).x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

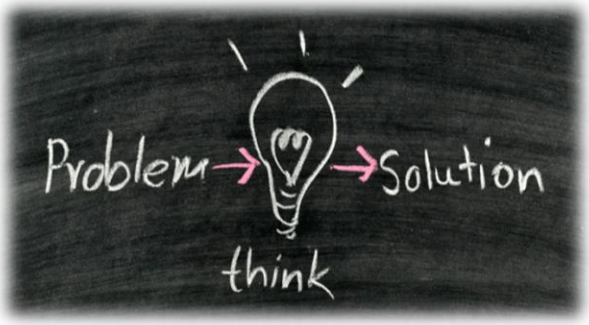
α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού. (Μονάδες 6)



1412

α) Η εξίσωση (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού αν και μόνο αν:

$$\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1}$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)x + (\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)[\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1] = 0 \overset{\lambda \neq 1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

γ) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 > 0,$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-(\lambda+1)) \pm \sqrt{(\lambda-1)^2}}{2 \cdot \lambda} = \frac{\lambda + 1 \pm (\lambda - 1)}{2\lambda} = \begin{cases} \dfrac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda} = 1 \\ \dfrac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda} = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

1416

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$. (Μονάδες 5)

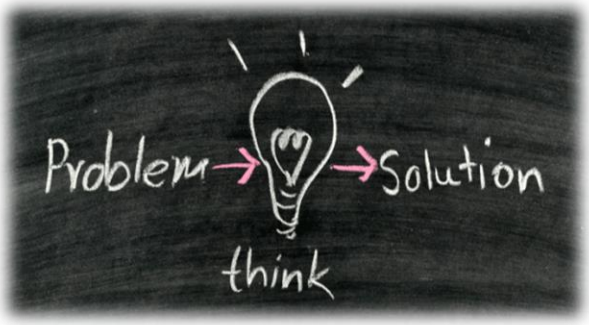
β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$.

(Μονάδες 10)



1416

α) Για λ = 0 η εξίσωση (1) γράφεται:

$$0 \cdot x^2 + 2(0-1)x + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x - 2 = 0$$

$$x = -1$$

β) i) Το τριώνυμο $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [2(\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 2) = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4$

Επειδή είναι $\Delta > 0$, για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2(\lambda-1) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot \lambda} = \frac{(-2\lambda+2) \pm 2}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{-2\lambda+2+2}{2\lambda} = \frac{-\lambda+2}{\lambda} = -1 + \frac{2}{\lambda} \\ \frac{-2\lambda+2-2}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

ii) Είναι:

$$|x_1 - x_2| > 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|-1 - \left(-1 + \frac{2}{\lambda}\right)\right| > 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|-1 + 1 - \frac{2}{\lambda}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{2}{\lambda}\right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{|\lambda|} > 1 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$$

Τελικά $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

1417

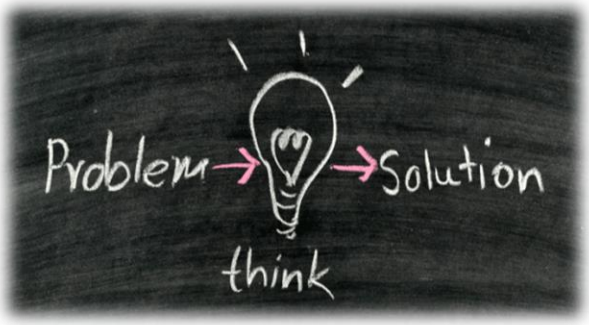
ΘΕΜΑ 4

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^η$ μέχρι και την $14^η$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)



1417

Επειδή κάθε σειρά καθισμάτων έχει 2 καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη, ο αριθμός των καθισμάτων ακολουθεί τους όρους μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 2$.

α) Η μεσαία σειρά έχει:

$$\alpha_{13} = \alpha_1 + (13 - 1)\omega = 12 + 12 \cdot 2 = 12 + 24 = 36 \text{ καθίσματα}$$

και η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{25} = \alpha_1 + (25 - 1)\omega = 12 + 24 \cdot 2 = 12 + 48 = 60 \text{ καθίσματα}$$

β) Η χωρητικότητα του σταδίου είναι:

$$S_{25} = \frac{25}{2}(\alpha_1 + \alpha_{25}) = \frac{25}{2}(12 + 60) = \frac{25}{2} \cdot 72 = \frac{1800}{2} = 900 \text{ καθίσματα}$$

γ) Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι:

$$S = S_{14} - S_6 = \frac{14}{2}[2\alpha_1 + (14 - 1)\omega] - \frac{6}{2}[2\alpha_1 + (6 - 1)\omega] =$$

$$= 7 \cdot (2 \cdot 12 + 13 \cdot 2) - 3 \cdot (2 \cdot 12 + 5 \cdot 2) =$$

$$= 7 \cdot (24 + 26) - 3 \cdot (24 + 10) =$$

$$= 7 \cdot 50 - 3 \cdot 34 = 350 - 102 = 248$$

ΘΕΜΑ 4

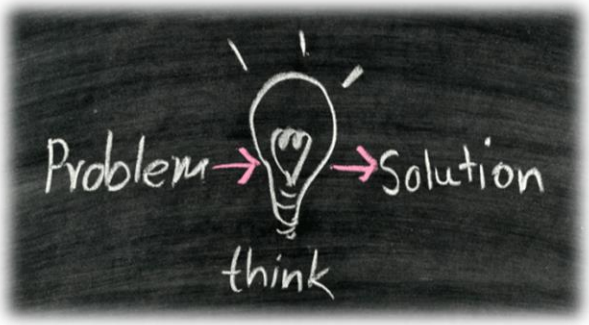
Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1)cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)



1418

α) Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι τύπου Α είναι $E_A = d^2$ cm^2.

Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι τύπου Β είναι $E_B = (d + 1)^2$ cm^2.

β) i) Αν το εμβαδόν της επιφάνειας είναι Ε, τότε ισχύει:

$$E = 200d^2 \text{ και } E = 128(d + 1)^2$$

Πρέπει επομένως:

$$200d^2 = 128(d + 1)^2 \overset{:8}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16(d + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16(d^2 + 2d + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16d^2 + 32d + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0$$

Το τριώνυμο $9d^2 - 32d - 16$ έχει $\alpha = 9$, $\beta = -32$, $\gamma = -16$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-32)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-16) = 1024 + 576 = 1600$$

και ρίζες τις:

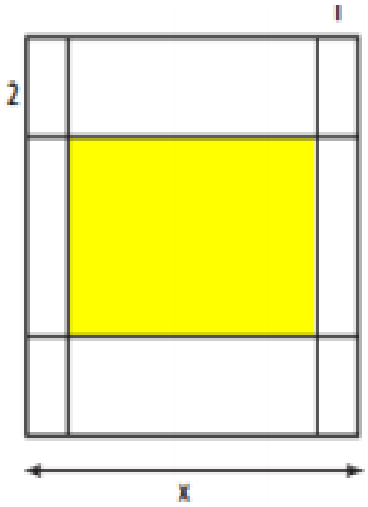
$$d_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-32) \pm \sqrt{1600}}{2 \cdot 9} = \frac{32 \pm 40}{18} = \begin{cases} \frac{32+40}{18} = 4 \\ \frac{32-40}{18} = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Η λύση $d = -\frac{4}{9}$ απορρίπτεται διότι δεν μπορεί το μήκος να είναι αρνητικό. Άρα $d = 4$ cm.

ii) $E = 200d^2 = 200 \cdot 4^2 = 200 \cdot 16 = 3.200$ cm^2.

ΘΕΜΑ 4

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x *cm* $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια *2 cm* στο πάνω και στο κάτω μέρος της και *1 cm* δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



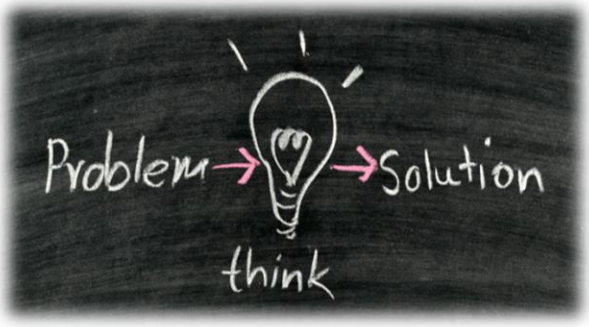
α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(x-2)(x-4)$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον *24* cm^2.

(Μονάδες 10)



1420

α) Το κίτρινο ορθογώνιο έχει διαστάσεις:

$$x-1-1=x-2 \text{ και } x-2-2=x-4$$

Επομένως, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(x-2)(x-4),\ 5\le x\le 10$$

β) Είναι:

$$E(x)=35 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+8=35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-27=0$$

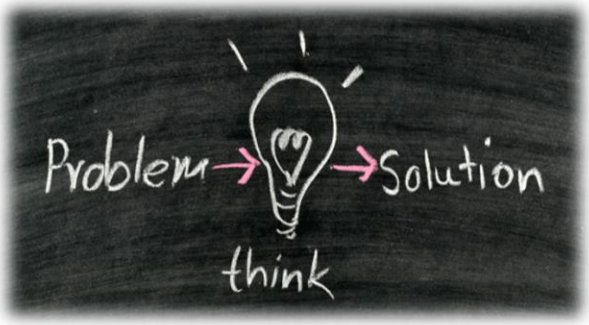
Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-27)=36+108=144>0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 12}{2}=\begin{cases}\frac{6+12}{2}=9\\ \frac{6-12}{2}=-3\end{cases}$$

Επειδή πρέπει $5\le x\le 10$, δεχόμαστε την τιμή $x=9$ cm.



1420

γ) Αναζητούμε τις τιμές του x που αποτελούν λύση της ανίσωσης:

$$E(x) \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \geq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 16$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = -16$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{6+10}{2} = 8 \\ \frac{6-10}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2 - 6x - 16$		+	0	−	0	+	

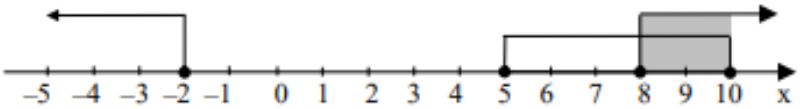
Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 6x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ή } x \geq 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [8, +\infty) \quad (1)$$

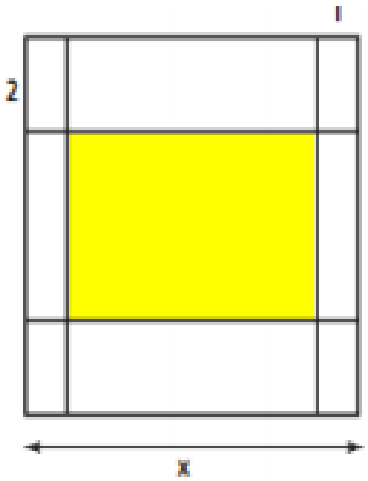
Πρέπει όμως να ισχύει και $5 \leq x \leq 10$ (2).

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



ΘΕΜΑ 4

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x *cm* $(5 \leq x \leq 10)$, στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια *2 cm* στο πάνω και στο κάτω μέρος της και *1 cm* δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



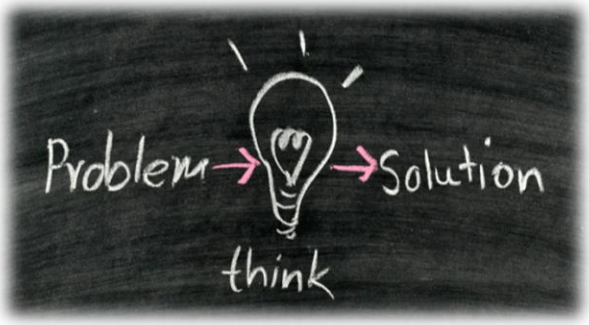
α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)= x^2-6x+8$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί το η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $24\ cm^2$. (Μονάδες 7)

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ $35\ cm^2$, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

(Μονάδες 10)



1421

α) Το κίτρινο ορθογώνιο έχει διαστάσεις:

$$x-1-1=x-2 \text{ και } x-2-2=x-4$$

Επομένως, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(x-2)(x-4)=x^2-6x+8,\ 5\le x\le 10$$

β) Είναι:

$$E(x)=24 \Leftrightarrow x^2-6x+8=24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-16=0$$

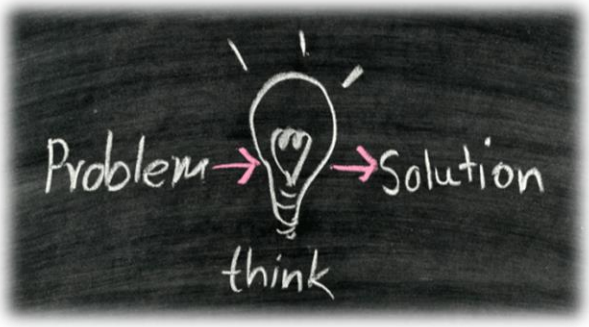
Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-16)=36+64=100>0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 10}{2}=\begin{cases}\frac{6+10}{2}=8\\ \frac{6-10}{2}=-2\end{cases}$$

Επειδή πρέπει $5\le x\le 10$, δεχόμαστε την τιμή $x=8$ cm.



1421

γ) Αναζητούμε τις τιμές του x που αποτελούν λύση της ανίσωσης:

$$E(x) \le 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \le 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \le 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 27$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = -27$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{6+12}{2} = 9 \\ \frac{6-12}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

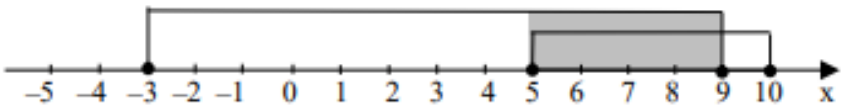
x	$-\infty$		-3		9		$+\infty$
$x^2 - 6x - 27$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 6x - 27 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 9 \Leftrightarrow x \in [-3, 9] \quad (1)$$

Πρέπει όμως να ισχύει και $5 \le x \le 10$ (2).

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$5 \le x \le 9 \Leftrightarrow x \in [5, 9]$$

ΘΕΜΑ 4

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.*

Π2: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Κέλβιν (^0K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^0C) το 273.*

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

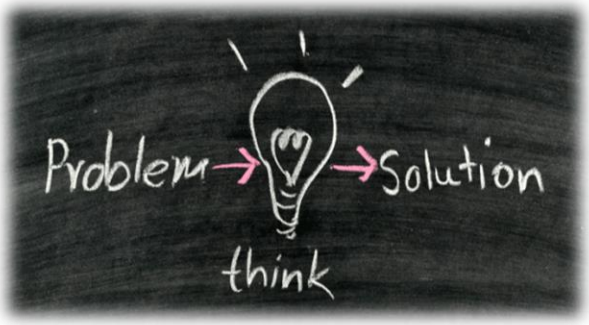
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (^0K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F) είναι η:

$$K = \frac{F-32}{1,8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από *278* ^0K μέχρι *283* ^0K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^0F.

(Μονάδες 10)



1422

α) Η πρόταση Π1 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$F = 1{,}8C + 32 \quad (1)$$

Η πρόταση Π2 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$K = C + 273 \quad (2)$$

β) Η ισότητα (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$F = 1{,}8C + 32 \Leftrightarrow F - 32 = 1{,}8C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{F-32}{1{,}8} \quad (3)$$

Τότε η ισότητα (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$K = C + 273 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} K = \frac{F-32}{1{,}8} + 273 \quad (4)$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$278 \le K \le 283 \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 278 \le \frac{F-32}{1{,}8} + 273 \le 283 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 278 - 273 \le \frac{F-32}{1{,}8} + 273 - 273 \le 283 - 273 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \le \frac{F-32}{1{,}8} \le 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 1{,}8 \le \frac{F-32}{1{,}8} \cdot 1{,}8 \le 10 \cdot 1{,}8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \le F - 32 \le 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 + 32 \le F - 32 + 32 \le 18 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 \le F \le 50$$

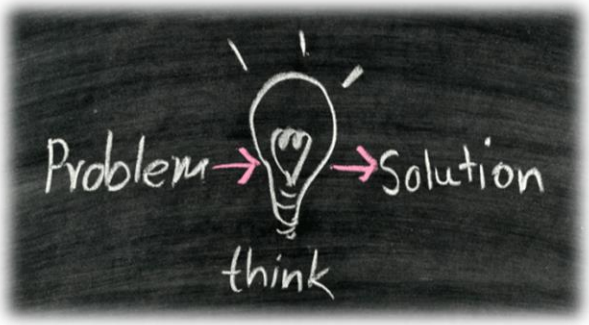
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,4)$. (Μονάδες 13)



1423

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$, $\gamma = \lambda^2 - 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 > 0, \text{ το οποίο ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2\lambda) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{2\lambda \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{2\lambda+2}{2} = \lambda + 1 \\ \frac{2\lambda-2}{2} = \lambda - 1 \end{cases}$$

γ) Είναι:

$$(-2 < \lambda + 1 < 4 \text{ και } -2 < \lambda - 1 < 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2 - 1 < \lambda + 1 - 1 < 4 - 1 \text{ και } -2 + 1 < \lambda - 1 + 1 < 4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3 < \lambda < 3 \text{ και } -1 < \lambda < 5)$$

Συναληθεύουμε τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:

$$-1 < \lambda < 3 \Leftrightarrow \lambda \in (-1, 3)$$

1424

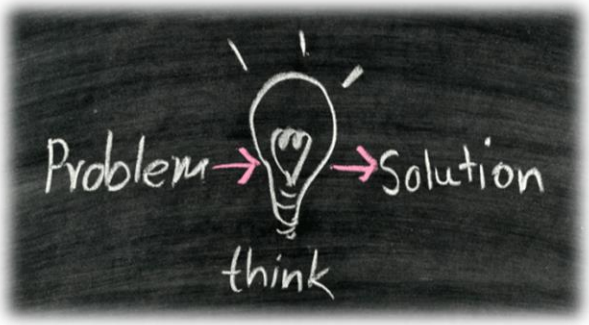
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8 \leq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για x ϵ (-1, 4]. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)



1424

α) Είναι:

$$|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3+2<x-2+2<3+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1<x<5$$

Το τριώνυμο x^2-2x-8 έχει $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=-8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{2+6}{2}=4\\ \frac{2-6}{2}=-2\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

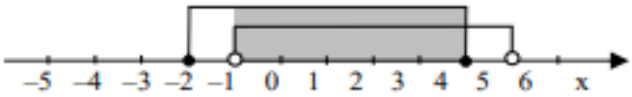
x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2-2x-8\le 0 \Leftrightarrow$$

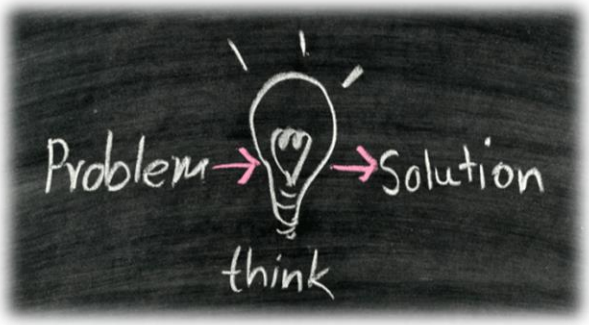
$$\Leftrightarrow -2\le x\le 4 \Leftrightarrow x\in[-2,4]$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-1<x\le 4 \Leftrightarrow x\in(-1,4]$$



1424

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 4]$ ισχύει ότι:

$$-1 < \rho_1 \leq 4 \ (1) \quad \text{και} \quad -1 < \rho_2 \leq 4 \ (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-1-1 < \rho_1 + \rho_2 \leq 4+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < \rho_1 + \rho_2 \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2} < \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \leq \frac{8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \leq 4$$

Άρα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in (-1, 4]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς ρ_1, ρ_2 πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

1425

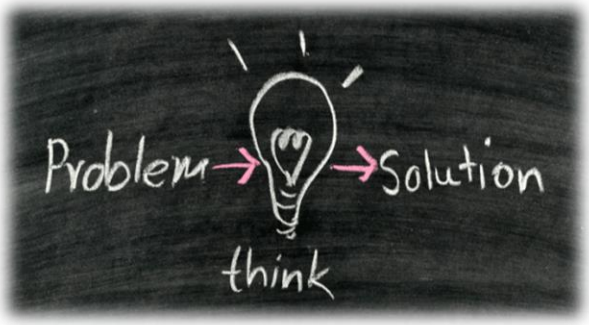
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \le |x| \le 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)



1425

α) • Είναι:

$$2 \le |x| \le 3 \Leftrightarrow (2 \le |x| \ \ (1) \ \text{ και } \ |x| \le 3 \ \ (2))$$

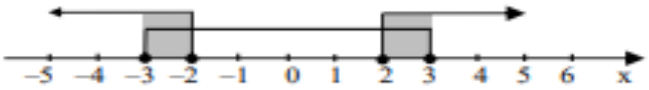
Από την ανίσωση (1) βρίσκουμε:

$$|x| \ge 2 \Leftrightarrow (x \le -2 \ \text{ ή } \ x \ge 2) \ \ (3)$$

Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$|x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3 \ \ (4)$$

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (3) και (4) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-3 \le x \le -2 \ \text{ ή } \ 2 \le x \le 3 \Leftrightarrow x \in [-3, -2] \cup [2, 3] \ \ (5)$$

• Το τριώνυμο $x^2 - 4x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \ \text{ ή } \ x = 4)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x^2 - 4x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

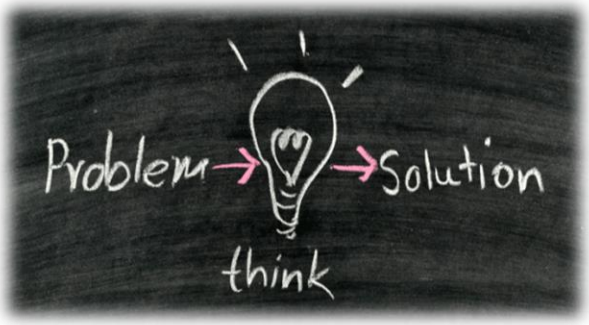
Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (0, 4) \ \ (6)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (5) και (6) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:

οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$2 \le x \le 3 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$$



1425

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [2, 3]$ ισχύει ότι:

$$2 \leq \rho_1 \leq 3 \quad (7) \quad \text{και} \quad 2 \leq \rho_2 \leq 3 \quad (8)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (7) και (8) και βρίσκουμε:

$$2 + 2 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq 3 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2} \leq \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \leq \frac{6}{2} \Leftrightarrow 2 \leq \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \leq 3$$

Άρα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in [2, 3]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. Ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς ρ_1, ρ_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

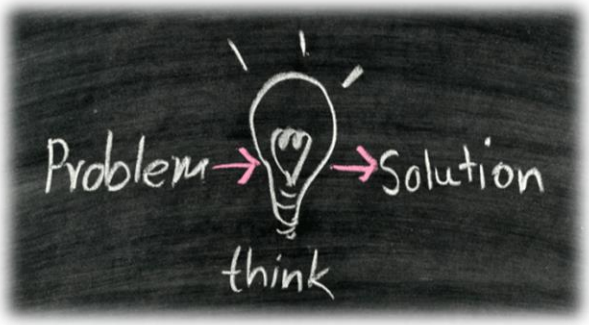
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$ (Μονάδες 10)



1426

α) • Είναι:

$$|x+1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x+1 \le 2 \Leftrightarrow -2-1 \le x+1-1 \le 2-1 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1 \quad (1)$$

• Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \quad (2)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:

οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-3 \le x < -1 \Leftrightarrow x \in [-3, -1)$$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [-3, -1)$ ισχύει ότι:

$$-3 \le \rho_1 < -1 \quad (3) \quad \text{και}$$

$$-3 \le \rho_2 < -1 \Leftrightarrow 1 < -\rho_2 \le 3 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$-3 + 1 < \rho_1 - \rho_2 < -1 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < \rho_1 - \rho_2 < 2$$

Άρα $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

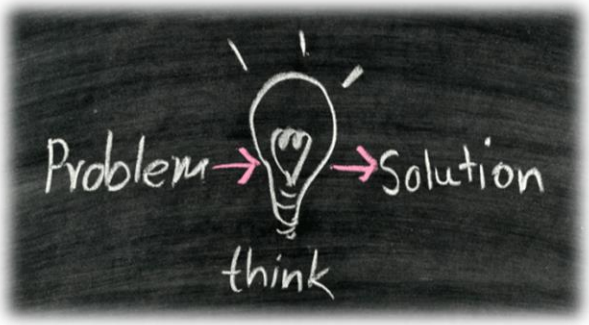
α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4| + |x-14| = 18$$ (Μονάδες 5)

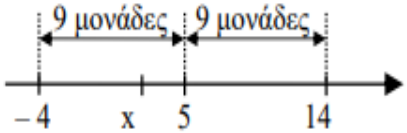


1427

α) Η απόσταση του σημείου M(x) του άξονα των πραγματικών αριθμών από το σημείο A(5) είναι μικρότερη ή ίση του 9.

β) Από το διπλανό σχήμα βρίσκουμε ότι:

$$x \in [-4, 14]$$



γ) Είναι:

$$d(x, 5) \leq 9 \Leftrightarrow |x-5| \leq 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -9 \leq x-5 \leq 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -9+5 \leq x-5+5 \leq 9+5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 14$$

δ) Ισχύει ότι:

$$x \geq -4 \Leftrightarrow x+4 \geq 0 \quad \text{και} \quad x \leq 14 \Leftrightarrow x-14 \leq 0$$

Τότε:

$$|x+4| + |x-14| = x+4-(x-14) =$$
$$= x+4-x+14 = 18$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

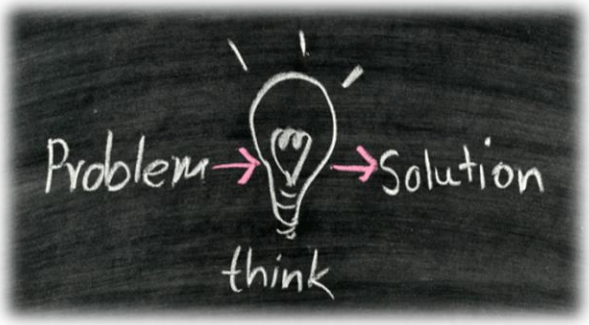
ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$|x+2|+|x-7|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)



1428

α) i) $|x + 2| = |x - (-2)| = d(x, -2) = MA$

ii) $|x - 7| = d(x, 7) = MB$

β) $|x + 2| + |x - 7| = MA + MB = AB$

γ) Ισχύει ότι:

$$|x + 2| + |x - 7| = AB =$$
$$= d(7, -2) = |7 - (-2)| = |9| = 9$$

δ) Είναι:

$$x > -2 \Leftrightarrow x + 2 > 0, \text{ άρα } |x + 2| = x + 2.$$

Επίσης:

$$x < 7 \Leftrightarrow x - 7 < 0, \text{ άρα}$$
$$|x - 7| = -(x - 7) = 7 - x$$

Τότε:

$$A = |x + 2| + |x - 7| = x + 2 + 7 - x = 9$$

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

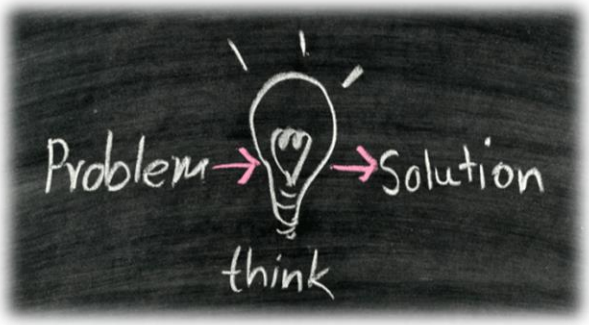
(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

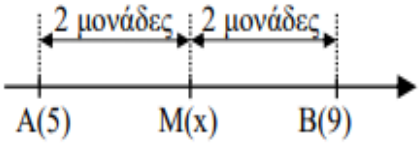


1429

α) $|x-5| = d(x, 5) = MA$

$|x-9| = d(x, 9) = MB$

β) i) Από την ισότητα $|x-5| = |x-9|$ συμπεραίνουμε ότι $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M είναι το μέσο του AB.



ii) Είναι:

$$AB = d(5, 9) = |5-9| = 4 \text{ μονάδες}$$

Επομένως το σημείο M απέχει 2 μονάδες από το σημείο A(5) και 2 μονάδες από το σημείο B(9), οπότε $x = 7$.

Αλγεβρικά

$$|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-5 = x-9 \text{ ή } x-5 = -(x-9)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0x = -4 \text{ αδύνατη ή } x-5 = -x+9) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$$

1430

ΘΕΜΑ 4

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

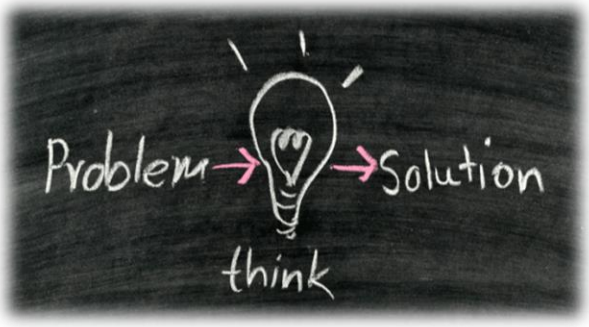
α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)



1430

α) Επειδή κάθε όρος που προστίθεται προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, οι αριθμοί που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 4$.

β) Είναι:

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2\alpha_1 + (40-1)\omega] =$$
$$= 20(2 \cdot 3 + 39 \cdot 4) = 20(6 + 156) =$$
$$= 20 \cdot 162 = 3240$$

γ) Για να είναι ο αριθμός 120 ένας από τους 40 αυτούς αριθμούς, πρέπει να υπάρχει φυσικός αριθμός ν, ώστε:

$$\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + (\nu - 1)4 = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\nu = 121 \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4}$$

Ο αριθμός $\frac{121}{4}$ δεν είναι φυσικός και επομένως δεν μπορεί ο αριθμός 120 να είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

δ) Θα βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ο αριθμός 235. Είναι:

$$\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + (\nu - 1)4 = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\nu = 236 \Leftrightarrow \nu = 59$$

Τότε:

$$S_{59} = \frac{59}{2}(\alpha_1 + \alpha_{59}) = \frac{59}{2}(3 + 235) =$$
$$= \frac{59}{2} \cdot 238 = \frac{14042}{2} = 7021$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S = S_{59} - S_{40} = 7021 - 3240 = 3781$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \qquad (1) \qquad \text{με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

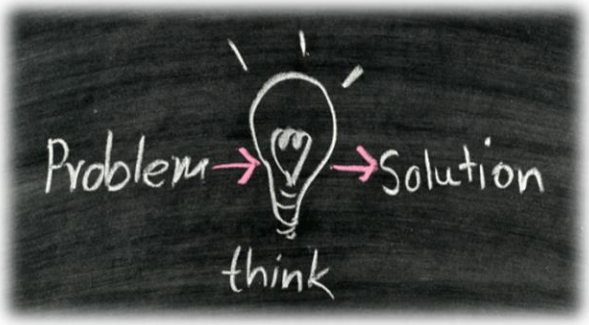
(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ.

(Μονάδες 10)



1431

α) Το πολυώνυμο: $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -4$, $\gamma = 2 - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \lambda^2) = 16 - 8 + 4\lambda^2 = 8 + 4\lambda^2$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 8 + 4\lambda^2 > 0, \text{ το οποίο ισχύει για κάθε } \lambda \in R$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4$$

ii) και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2-\lambda^2}{1} = 2 - \lambda^2$$

γ) i) Έστω $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ και x_2 η ζητούμενη ρίζα. Τότε:

$$x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 4 - 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

ii) Είναι:

$$x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2 - \sqrt{3}^3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-5x+6 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση

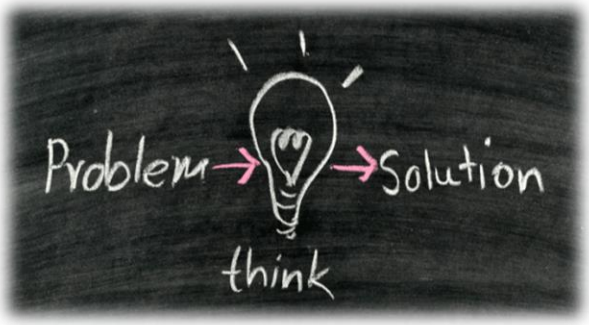
$$\frac{1}{4}x^2+(2-\lambda)x+\lambda-2=0 \qquad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda.$$

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

(Μονάδες 5)



1432

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1, \beta = -5, \gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x < 2 \text{ ή } x > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \text{ και}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

β) i) Το τριώνυμο $\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2$ έχει $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = 2 - \lambda, \gamma = \lambda - 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2 - \lambda)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\lambda - 2) =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - \lambda + 2 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 2 \text{ ή } \lambda > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

ii) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} = 4(\lambda - 2)$$

Η εξίσωση (1) έχει ομόσημες ρίζες, αν και μόνο αν:

$$(\Delta \geq 0 \text{ και } P > 0) \Leftrightarrow (\lambda^2 - 5\lambda + 6 \geq 0 \text{ και } 4(\lambda - 2) > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda \leq 2 \text{ ή } \lambda \geq 3 \text{ και } \lambda > 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \geq 3 \Leftrightarrow \lambda \in [3, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 7)

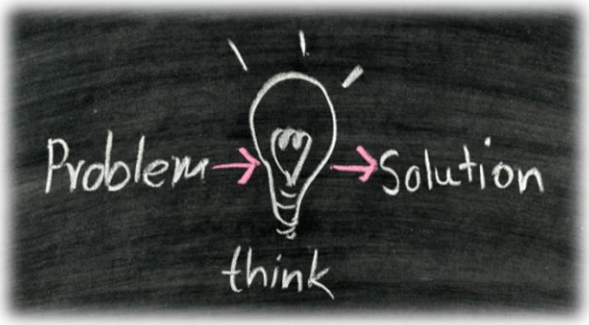
β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)



1433

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1, 2) αν και μόνο αν:

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot 1 - \alpha + 2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$2 = 2, \text{ ισχύει}$$

β) i) Αφού οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα κοινό σημείο με τετμημένη 1, ισχύει ότι:

$$f(1) = g(1) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \alpha + 2 = 1^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2$$

ii) Για α = 2 οι τύποι των f, g γίνονται:

$$f(x) = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2x \quad \text{και}$$

$$g(x) = x^2 - 2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g προκύπτουν από τη λύση του συστήματος: $y = f(x)$ και $y = g(x)$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

Επομένως δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο εκτός από αυτό με τετμημένη 1.

Για να έχουν οι C_f, C_g δύο κοινά σημεία, πρέπει η εξίσωση f(x) = g(x) να έχει δύο ρίζες άνισες.

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\alpha x - \alpha + 2 = x^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$(-\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow$$

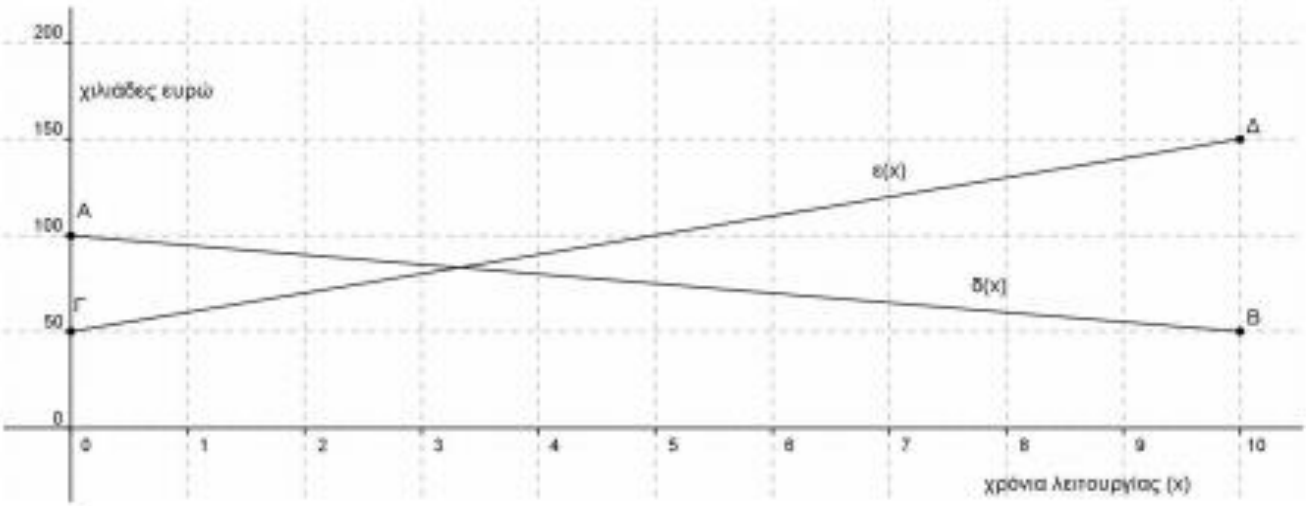
$$\alpha^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha < -2 \text{ ή } \alpha > 2$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα *ΑΒ* με *Α(0,100)* και *Β(10,50)* παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *δ(x)* των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα *x* χρόνια της λειτουργίας της.

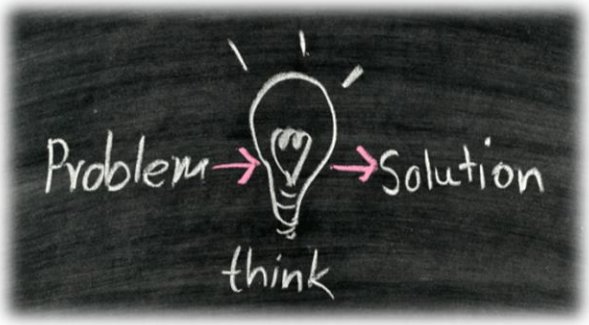
Το ευθύγραμμο τμήμα *ΓΔ* με *Γ(0,50)* και *Δ(10,150)* παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων *ε(x)* της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα *x* χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων *δ(x)*, *ε(x)* και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (Μονάδες 15)

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων *ΑΒ* και *ΓΔ* και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)



1434

α) Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που δίνονται βρίσκουμε ότι οι τεταγμένες των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στην τετμημένη με τιμή 5 κυμαίνονται για τη συνάρτηση εσόδων ε(x) στο 100 και για τη συνάρτηση δαπανών δ(x) στο 75.

β) i) Έστω $\delta(x) = \lambda_1 x + \beta_1$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας που περιγράφει τη συνάρτηση δαπανών. Η ευθεία (δ) διέρχεται από τα σημεία Α(0, 100) και Β(10, 50) οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\lambda_1 = \frac{50-100}{10-0} = \frac{-50}{10} = -5$$

Τότε η ευθεία (δ) γράφεται:

$$\delta(x) = -5x + \beta_1$$

Επειδή η ευθεία (δ) διέρχεται από το Α οι συντεταγμένες του σημείου Α την επαληθεύουν. Τότε:

$$A \in (\delta) \Leftrightarrow 100 = 0 + \beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = 100$$

Τελικά η ευθεία (δ) έχει εξίσωση:

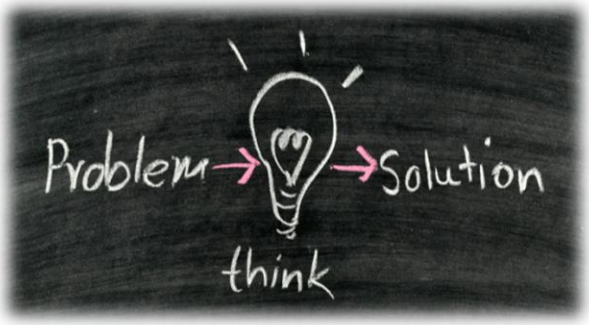
$$\delta(x) = -5x + 100$$

Έστω $\varepsilon(x) = \lambda_2 x + \beta_2$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας που περιγράφει τη συνάρτηση εσόδων. Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία Γ(0, 50) και Δ(10, 150) οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\lambda_2 = \frac{150-50}{10-0} = \frac{100}{10} = 10$$

Τότε η ευθεία (ε) γράφεται:

$$\varepsilon(x) = 10x + \beta_2$$



1434

Επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από το Γ οι συντεταγμένες του σημείου Γ την επαληθεύουν. Τότε:

$$\Gamma \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 50 = 0 + \beta_2 \Leftrightarrow \beta_2 = 50$$

Τελικά η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

$$\varepsilon(x) = 10x + 50$$

Για x = 5 βρίσκουμε:

$$\delta(5) = -25 + 100 = 75 \quad \text{και}$$

$$\varepsilon(5) = 50 + 50 = 100$$

Επομένως οι εκτιμήσεις που κάναμε ήταν σωστές.

ii) Η τετμημένη του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$\varepsilon(x) = \delta(x) \Leftrightarrow 10x + 50 = -5x + 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$$

Για x = 10/3 βρίσκουμε:

$$\varepsilon(10/3) = 10 \cdot 10/3 + 50 = 250/3$$

Άρα το σημείο τομής των ΑΒ και ΓΔ έχει συντεταγμένες Μ(3,3, 83).

Επομένως 3 έτη και 3 μήνες (περίπου) μετά την έναρξη λειτουργίας της η εταιρία εμφάνισε ισοσκελισμό εσόδων και εξόδων.

Σχόλιο

Η παραπάνω εφαρμογή έχει ένα βασικό μειονέκτημα. Οι τιμές «ετήσια έσοδα» και «ετήσια έξοδα» είναι μεμονωμένες μεταβλητές και δεν μπορούν να περιγραφούν με ευθείες.

ΘΕΜΑ 4

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα *Α* πρέπει να καταθέσει τον $1^{ο}$ μήνα *1 ευρώ*, το $2^{ο}$ μήνα *2 ευρώ*, τον $3^{ο}$ μήνα *4 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα *Β* πρέπει να καταθέσει τον $1^{ο}$ μήνα *100 ευρώ*, το $2^{ο}$ μήνα *110 ευρώ*, τον $3^{ο}$ μήνα *120 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά *10 ευρώ* μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 4)

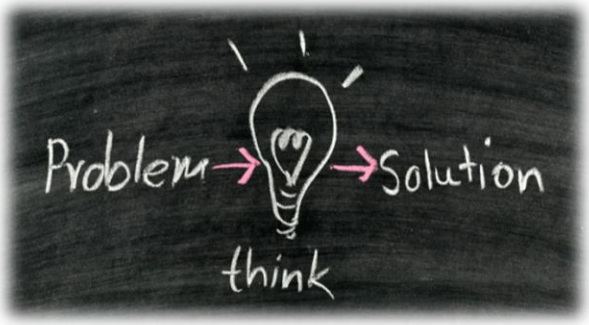
ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από *ν* μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Β*. (Μονάδες 5)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους *6* μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε *12* μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)



1435

α) i) Από τα δεδομένα που δίνονται για το πρόγραμμα Α διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$ και $\lambda = 2$. Ισχύει επομένως ότι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 1 \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1}$$

ii) Το πρόγραμμα Β περιγράφεται από μια αριθμητική πρόοδο με $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 110$, $\beta_3 = 120$ και $\omega = 10$. Ισχύει επομένως ότι:

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \beta_\nu = 100 + (\nu - 1)10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta_\nu = 100 + 10\nu - 10 \Leftrightarrow \beta_\nu = 90 + 10\nu$$

iii) Το ποσό που θα υπάρχει μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α θα είναι:

$$A_\nu = \alpha_1\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow A_\nu = 1 \cdot \frac{2^\nu - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow A_\nu = 2^\nu - 1$$

iv) Το ποσό που θα υπάρχει μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β θα είναι:

$$B_\nu = \frac{\nu}{2}(\beta_1 + \beta_\nu) \Leftrightarrow B_\nu = \frac{\nu}{2}(100 + 90 + 10\nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B_\nu = \frac{\nu}{2}(190 + 10\nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B_\nu = \frac{190\nu + 10\nu^2}{2} \Leftrightarrow B_\nu = 95\nu + 5\nu^2$$

β) i) Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 6 μήνες:

$$A_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63 \text{ €}$$

Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 6 μήνες:

$$B_6 = 95 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 = 570 + 180 = 750 \text{ €}$$

ii) Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 12 μήνες:

$$A_{12} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4.095 \text{ €}$$

Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 12 μήνες:

$$B_{12} = 95 \cdot 12 + 5 \cdot 12^2 = 1.140 + 720 = 1.860 \text{ €}$$

Επομένως, ακολουθώντας το πρόγραμμα Α, θα έχει συγκεντρώσει μεγαλύτερο ποσό.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

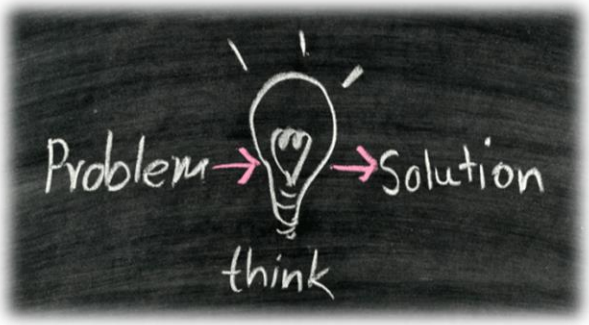
i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \quad \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+a} < 1+\sqrt{a}$ (Μονάδες 7)



1436

α) Είναι:

$$x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$$

Το πολυώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

Το πρόσημο του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

	x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
	$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

β) i)
- $0 < \alpha^2$
- $\alpha < 1 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha \cdot \alpha < 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 < \alpha$
- $\alpha^2 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\alpha^2} < \sqrt{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha < \sqrt{\alpha}$
- $\alpha < 1 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\alpha} < 1$

Τελικά:

$$0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$$

ii) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha}^2 < (1+\sqrt{\alpha})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha < 1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{\alpha}$$

Ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.

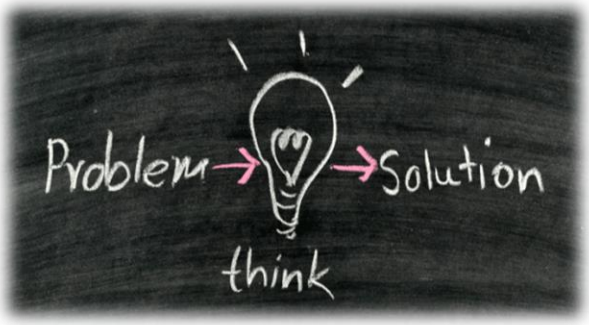
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-2$. (Μονάδες 9)

γ) Για $x\in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$ (Μονάδες 10)



1437

α) Πρέπει:

$$|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \neq -3 \text{ και } x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{-3, 3\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$x^2 - 5|x| + 6 = |x|^2 - 5|x| + 6$$

Θέτουμε $|x| = y$ (1) και βρίσκουμε:

$$y^2 - 5y + 6$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

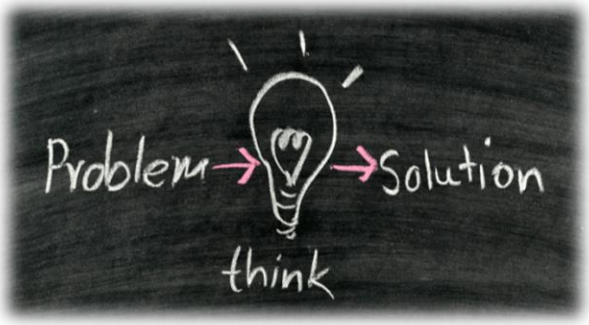
Τότε:

$$y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5|x| + 6 = (|x| - 3)(|x| - 2)$$

Τελικά ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{(|x|-3)(|x|-2)}{|x|-3} = |x| - 2, \; x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$



1437

i) Η εξίσωση γράφεται:

$$(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x|-2+2)^2-4(|x|-2)-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x|^2-4|x|+8-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3=0$$

Θέτουμε $|x|=z$ (2) και βρίσκουμε:

$$z^2-4z+3=0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4>0$$

και ρίζες τις:

$$z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3\\ \frac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

Τότε από την ισότητα (2) βρίσκουμε:

- $|x|=3 \Leftrightarrow (x=-3$ ή $x=3)$, απορρίπτονται
- $|x|=1 \Leftrightarrow (x=-1$ ή $x=1)$

1438

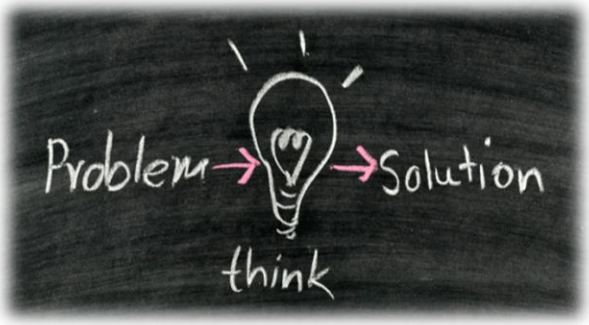
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S - P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 9)



1438

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) =$$
$$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1 \quad \text{και}$$
$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$$

Η παράσταση Α έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$S - P > 0 \Leftrightarrow 1 - (\lambda - \lambda^2) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 > 0 \ (2)$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

Επομένως η ανίσωση (2) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

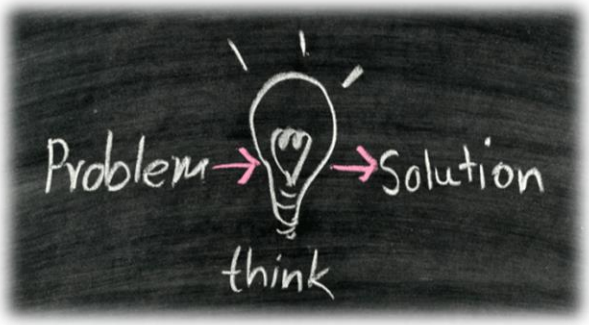
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S= x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών . (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda<0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1+x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)



1439

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2 + 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$
$$= (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) i) Επειδή $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} < 0$, για $\lambda < 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι αρνητικές.

ii) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow |S| \geq 2P \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda^2+1|}{|\lambda|} \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda^2 + 1| \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|\lambda| - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, με $\lambda>0$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 10)

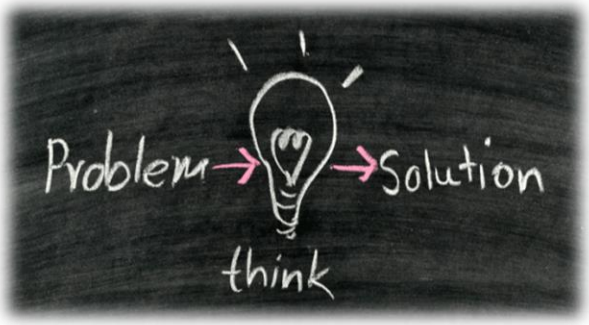
β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)



1440

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2 + 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$
$$= (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda > 0$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$
$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

Επειδή $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$, για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E = x_1 \cdot x_2 = 1$.

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$

Είναι:

$$\Pi \geq 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} \geq 4 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) \geq 4\lambda \overset{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda > 0$.

iii) Έχουμε:

$$\Pi = 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} = 4 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) = 4\lambda \overset{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ το τριώνυμο γράφεται:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $x_1 = x_2 = 1$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x - 5, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

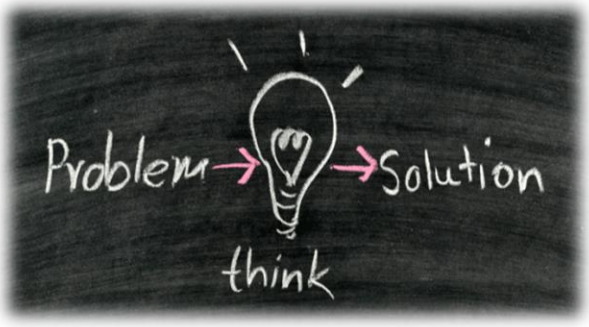
α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε

την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ (Μονάδες 5+5=10)



1441

α) Είναι:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + \alpha = 4 - 8 + \alpha = -4 + \alpha \quad \text{και}$$
$$g(2) = 2\alpha - 5$$

Τότε:

$$f(2) = g(2) \Leftrightarrow -4 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4 + 5 = 2\alpha - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$$

β) Για $\alpha = 1$ είναι:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad \text{και}$$
$$g(x) = x - 5$$

i) Τότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

ii) Είναι:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq 2 \ \text{ή} \ x \geq 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

Από τη ιδιότητα $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ ισχύει ότι:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

1442

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

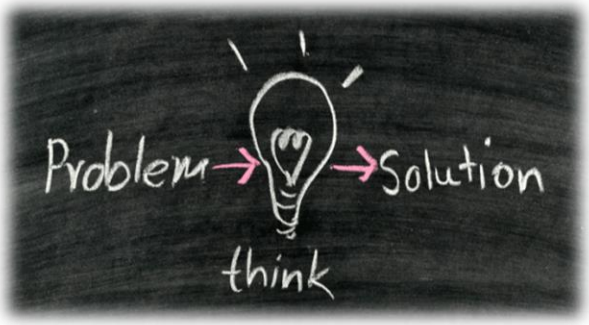
i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \quad \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \quad \alpha^2, \quad \dfrac{a+a^2}{2}$ (Μονάδες 7)



1442

i) Είναι:

$$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ή } x > 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

β) i) • $0 < 1$

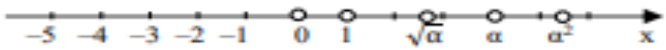
• $1 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{1} < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{\alpha}$

• $1 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha < \alpha^2 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha^2} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \alpha$

• $1 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} 1 \cdot \alpha < \alpha \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha < \alpha^2$

Τελικά:

$$0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$$



ii) Ισχύει ότι:

• $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha > 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha > \alpha + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha > 2\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\alpha}{2} > \alpha$

• $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha > 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 > \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 > \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > \frac{\alpha^2+\alpha}{2}$

Τελικά:

$$\alpha < \frac{\alpha^2+\alpha}{2} < \alpha^2$$

ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με

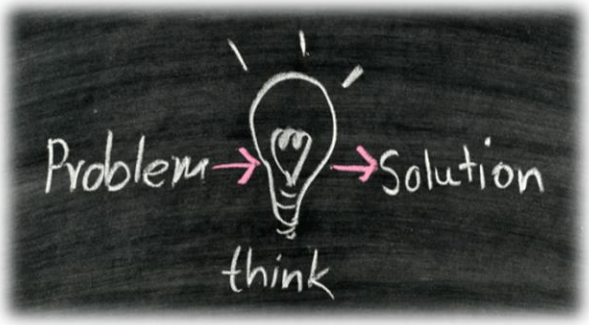
$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda+1)x + 2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2). (Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β(2, 0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x'x και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x'x. (Μονάδες 10)



1444

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο A(0, 2) αν και μόνο αν:

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 0^2 - (\lambda + 1) \cdot 0 + 2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2,$$

το οποίο ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = -1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = (-1 + 1)x^2 - (-1 + 1)x + 2 = 2$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x Που διέρχεται από το σημείο A(0, 2).

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο B(2, 0) και επομένως διέρχεται από αυτό αν και μόνο αν:

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 2^2 - (\lambda + 1) \cdot 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 4 - 2\lambda - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\lambda + 4 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Για λ=-2 έχουμε: $f(x) = (-2 + 1)x^2 - (-2 + 1)x + 2 = -x^2 + x + 2$. Η γραφική παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα σημείο σημαίνει ότι η τεταγμένη του σημείου είναι 0. Γνωρίζουμε ότι τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο (2,0) άρα για να βρούμε το άλλο σημείο (ρ,0) αρκεί να βρούμε την άλλη λύση ρ της εξίσωσης: $-x^2 + x + 2=0$. Εφόσον S = -2 έχουμε: -2=2+ ρ οπότε ρ = -4. Άρα το άλλο σημείο είναι το (-4,0).

δ) Για $\lambda = 1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = (1 + 1)x^2 - (1 + 1)x + 2 =$$
$$= 2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x + 1)$$

Το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x.

1445

ΘΕΜΑ 4

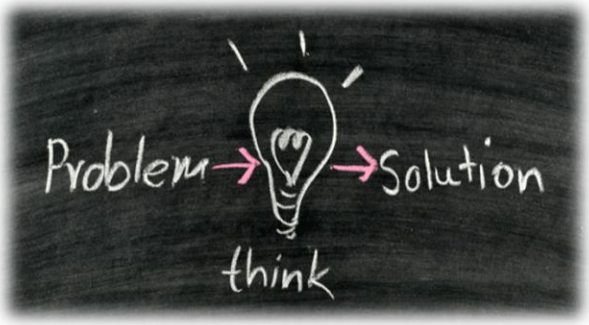
α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1)

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)



1445

α) Θέτουμε: $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

Το τριώνυμο $y^2 - 7y + 12$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -7$, $\gamma = 12$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{7+1}{2} = 4 \text{ δεκτή} \\ \frac{7-1}{2} = 3 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

- Για $y = 4$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -2)$$

- Για $y = 3$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x^2 = 3 \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}\right)$$

β) Θέτουμε: $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$y^2 + \beta y + \gamma = 0 \quad (2)$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (2) είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0, \text{ από υπόθεση}$$

Επομένως η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις οποίες συμβολίζουμε y_1, y_2.

Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

- $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\beta}{1} = -\beta > 0$, άρα οι ρίζες y_1, y_2 είναι θετικές.
- $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{1} = \gamma > 0$, άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.

Τότε:

$$(x^2 = y_1 \text{ ή } x^2 = y_2) \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{y_1} \text{ ή } x = -\sqrt{y_1} \text{ ή } x = \sqrt{y_2} \text{ ή } x = -\sqrt{y_2}\right)$$

Τελικά η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

1446

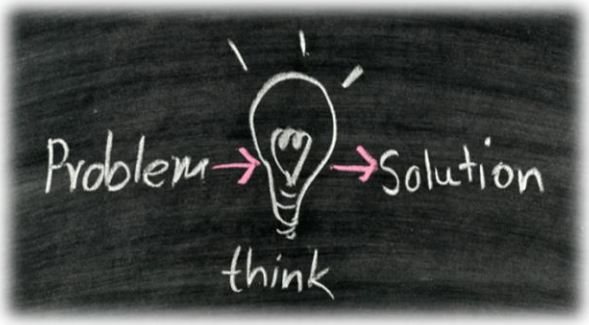
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)



1446

α) Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$, για κάθε $x \in R$.

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x και επομένως δεν τον τέμνει.

β) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$ προκύπτουν από την επίλυση της ανίσωσης:

$$f(x) < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$$

Για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι:

$$|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

Επομένως, λόγω του ερωτήματος β, το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$.

1447

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}-x+2, & \text{αν } x<0\\ x+2, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

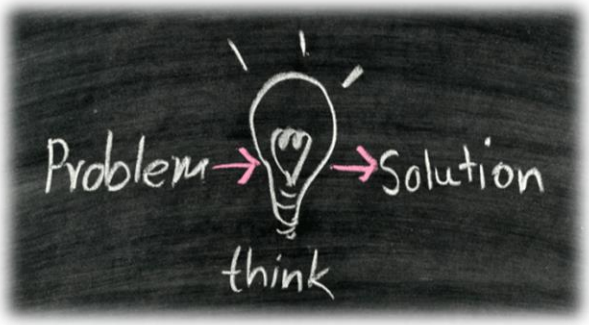
(Μονάδες 3)

β) i)Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) i)Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=a$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)



1447

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο της f, και συγκεκριμένα στον κλάδο $x + 2$ όπου $x = 0$ και βρίσκουμε:

$$f(0) = 0 + 2 = 2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο M(0, 2).

β) i) • Για $x = -1$ είναι:

$$f(-1) = -(-1) + 2 = 1 + 2 = 3$$

• Για $x = -2$ είναι:

$$f(-2) = -(-2) + 2 = 2 + 2 = 4$$

Άρα η ημιευθεία $y = -x + 2$ διέρχεται από τα σημεία A(– 1, 3) και B(– 2, 4).

• Για $x = 1$ είναι:

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

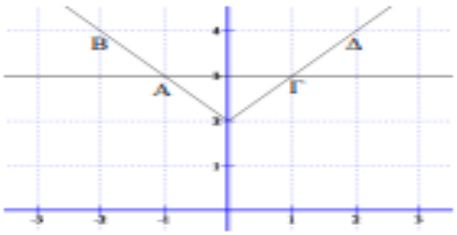
• Για $x = 2$ είναι:

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

Άρα η ημιευθεία $y = x + 2$ διέρχεται από τα σημεία Γ(1, 3) και Δ(2, 4).

Η ευθεία $y = 3$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο E(0, 3).

Η γραφική παράσταση είναι η εξής:



Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι τα σημεία τομής της f με την ευθεία $y = 3$ είναι τα A(– 1, 3) και Γ(1, 3).

ii) Τα σημεία A και Γ έχουν αντίθετες τετμημένες και ίσες τεταγμένες. Άρα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

γ) i) Η ευθεία $y = α$ τέμνει της C_f, όπως διαπιστώνουμε από το γράφημα, σε δύο σημεία αν και μόνο αν $α > 2$.

ii) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = |x| + 2,\ x \in R$$

Τότε:

$$f(x) = α \Leftrightarrow |x| + 2 = α \Leftrightarrow |x| = α - 2 \quad (1)$$

- Αν $α < 2 \Leftrightarrow α - 2 < 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- Αν $α = 2 \Leftrightarrow α - 2 = 0$ η εξίσωση (1) έχει λύση την:

$$|x| = 2 - 2 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

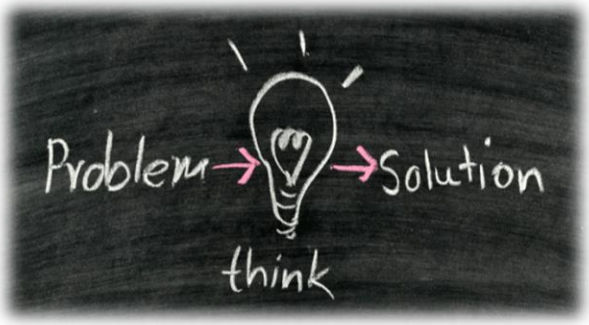
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν α=2. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ (Μονάδες 10)



1448

α) Το τριώνυμο $\alpha x^2 - 5x + \alpha$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \alpha = 25 - 4\alpha^2$$

Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 4\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\alpha^2 \geq -25 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow |\alpha| \leq \frac{5}{2}$$

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι αντίστροφοι αριθμοί.

β) Για $\alpha = 2$ η εξίσωση γράφεται:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

γ) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x + \frac{1}{x} = y$ (1), οπότε γράφεται:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) λύθηκε στο σκέλος (ii) και προέκυψε ότι:

$$y = 2 \text{ ή } y = \frac{1}{2}$$

- Για $y = 2$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

- Για $y = \frac{1}{2}$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 = -15 < 0$, οπότε είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 4

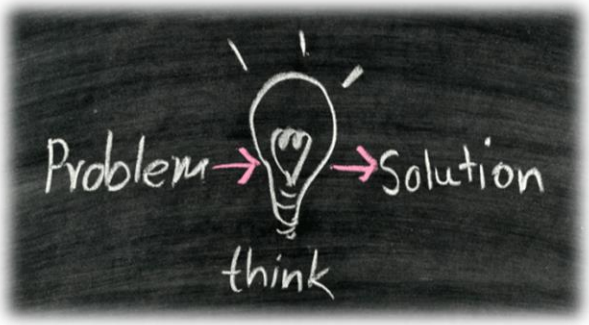
Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 10)



1449

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = R$ και η g το $B = R$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

- Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1 - 2 = -1$
- Για $x = 4$ είναι $f(4) = 16 - 8 = 8$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων είναι τα:

$$A(1, -1) \text{ και } B(4, 8)$$

β) Τα διαστήματα για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g είναι εκείνα για τα οποία ισχύει:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$$

Τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 5x + 4$ τις προσδιορίσαμε στο σκέλος (α).

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (1, 4)$$

γ) Κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, με $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν ισχύει:

$$f(x) > \alpha \text{ για κάθε } \alpha < -1$$

Τότε:

$$x^2 - 2x > \alpha \Leftrightarrow x^2 - 2x - \alpha > 0$$

Η ανίσωση ισχύει διότι το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\alpha) =$$
$$= 4 + 4\alpha = 4(1 + \alpha) < 0,$$

για κάθε $\alpha < -1$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2=\lambda(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$. (Μονάδες 5)

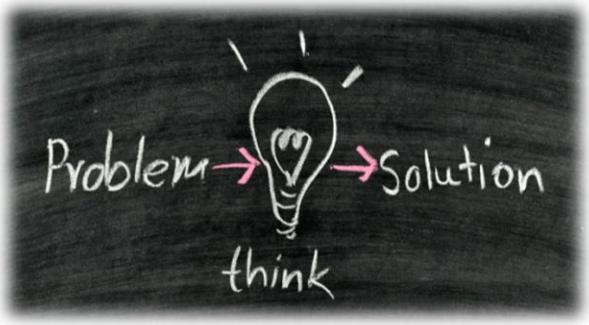
β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1x_2$

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=(4x_1-3)(4x_2-3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)



1450

α) Η εξίσωση γράφεται:

$$(x-2)^2 = \lambda(4x-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4\lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 4\lambda x + 4 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda = 0$$

β) Το τριώνυμο $x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -4(1+\lambda)$, $\gamma = 4 + 3\lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-4(1+\lambda)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4+3\lambda) =$$
$$= 16 + 32\lambda + 16\lambda^2 - 16 - 12\lambda =$$
$$= 16\lambda^2 + 20\lambda$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 5\lambda > 0$$

Το τριώνυμο $4\lambda^2 + 5\lambda$ έχει ρίζες τις:

$$4\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda = -\tfrac{5}{4} \text{ ή } \lambda = 0\right)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$4\lambda^2 + 5\lambda$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$4\lambda^2 + 5\lambda > 0 \Leftrightarrow \left(\lambda < -\tfrac{5}{4} \text{ ή } \lambda > 0\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, -\tfrac{5}{4}\right) \cup (0, +\infty)$$

γ) **i)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(1+\lambda)}{1} = 4(1+\lambda) \quad \text{και}$$
$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4+3\lambda}{1} = 4 + 3\lambda$$

ii) Είναι:

$$A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) =$$
$$= 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 =$$
$$= 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 =$$
$$= 16(4 + 3\lambda) - 12 \cdot 4(1+\lambda) + 9 =$$
$$= 64 + 48\lambda - 48 - 48\lambda + 9 = 25$$

1451

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$ (Μονάδες 10)

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = -(\lambda^2 + 5)$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(\lambda^2 + 5)] = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$$

β) Έχουμε $5\lambda^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in R$ και $20 > 0$ οπότε $\Delta > 0$, για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$$

έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in R$.

γ) $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$ (1)

Από τους τύπους Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = S = \frac{-\beta}{\alpha} = \lambda$ και $x_1x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = -(\lambda^2 + 5)$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$-(\lambda^2 + 5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$ και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

1452

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2=0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β. (Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

β) i) Ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0,$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση.

ii) Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $x_1 = 4$ ή $x_2 = -1$. Στο σκέλος (βi) αποδείξαμε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) άρα πρέπει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta} = -1$$

Επειδή οι α, β είναι ομόσημοι η περίπτωση $\frac{\alpha}{\beta} = -1$ απορρίπτεται. Άρα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$$

δηλαδή, ο α είναι τετραπλάσιος του β.

1453

ΘΕΜΑ 4

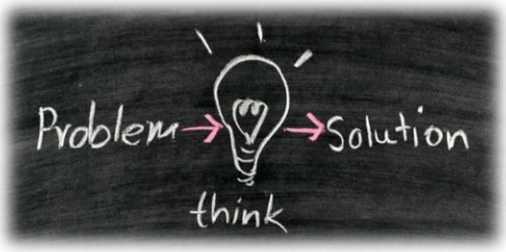
Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$. (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 3\nu - 2$. (Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)



α) Είναι:

$$\alpha_{20} - \alpha_{10} = \alpha_1 + (20-1)\omega - [\alpha_1 + (10-1)\omega] =$$
$$= \alpha_1 + 19\omega - \alpha_1 - 9\omega = 10\omega$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30 \Leftrightarrow 10\omega = 30 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Τότε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 1 + (\nu-1)3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 1 + 3\nu - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 3\nu - 2$$

γ) Είναι:

$$\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow 3\nu - 2 > 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu > 32 \Leftrightarrow \nu > \frac{32}{3} \cong 10{,}6$$

Άρα ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30 είναι ο 11ος.

δ) Ισχύει ότι:

$$\alpha_\nu < 60 \Leftrightarrow 3\nu - 2 < 60 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu < 62 \Leftrightarrow \nu < \frac{62}{3} \cong 20{,}6$$

Επομένως 20 όροι είναι μικρότεροι του 60.

1454

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι α=1 και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R αν και μόνο αν:

$$x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0, \text{ για κάθε } x\in R$$

Ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha=1>0$ οπότε το τριώνυμο είναι μη αρνητικό αν και μόνο αν:

$$\Delta\leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2-4\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{4}\Leftrightarrow 1-\alpha\leq 0\Leftrightarrow \alpha\geq 1$$

β) i) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ αν και μόνο αν:

$$f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{0^2-0+\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\alpha=1$$

ii) Για α = 1 ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

Τότε:

$$f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ ή } x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2})\Leftrightarrow(x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{ ή } x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=1 \text{ ή } x=0)$$

1455

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(1-2\lambda)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm (1 - 2\lambda)}{2} = \begin{cases} \frac{1+1-2\lambda}{2} = 1 - \lambda \\ \frac{1-1+2\lambda}{2} = \lambda \end{cases}$$

Τότε:

$$0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < |1 - \lambda - \lambda| < 2 \Leftrightarrow 0 < |1 - 2\lambda| < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0 < |1 - 2\lambda| \text{ και } |1 - 2\lambda| < 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda \neq 0 \text{ και } -2 < 1 - 2\lambda < 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda \neq 1 \text{ και } -3 < -2\lambda < 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda \neq \frac{1}{2} \text{ και } -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

1456

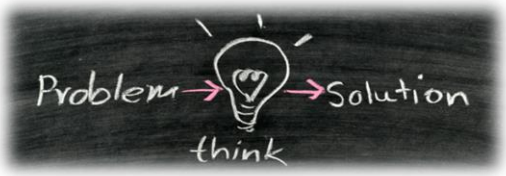
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$ (Μονάδες 9)



α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή $\Delta = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0$, η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Τελικά η εξίσωση έχει δύο ρίζες για $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1 \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$$

Τότε:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow d(x_1, x_2) \cdot d(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d^2(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1^2 - 4(\lambda - \lambda^2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4(\lambda - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } 1 - \lambda = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1)$$

1457

ΘΕΜΑ 4

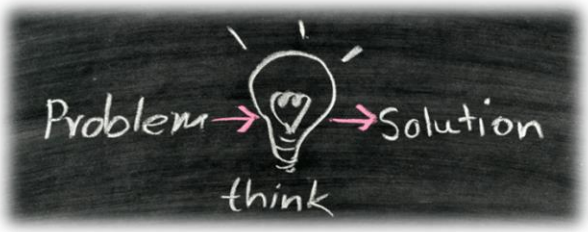
Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)



α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) =$$
$$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) Για να έχει η συνάρτηση πεδίο ορισμού το R αρκεί να ισχύει:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$, πρέπει:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

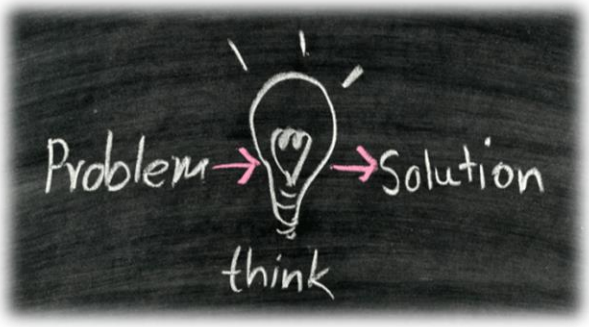
β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ (Μονάδες 4)

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$f(x_2),\ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),\ f(x_2 + 1)$. (Μονάδες 5)



1458

i) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) =$$

$$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Το τριώνυμο έχει δύο (πραγματικές) ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) i) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2 \Leftrightarrow \left(x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} \text{ και } \frac{x_1+x_2}{2} < x_2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x_1 < x_1 + x_2 \text{ και } x_1 + x_2 < 2x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ και } x_1 < x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

που ισχύει από υπόθεση.

ii) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		x_1		$\frac{x_1+x_2}{2}$		x_2		x_2+1		$+\infty$
$x^2 - x + \lambda - \lambda^2$		$+$	0		$-$		0		$+$		

Είναι:

$$f(x_2) = 0,\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0,\ f(x_2 + 1) > 0$$

Άρα:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)$$

ΘΕΜΑ 4

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \qquad (1)$$

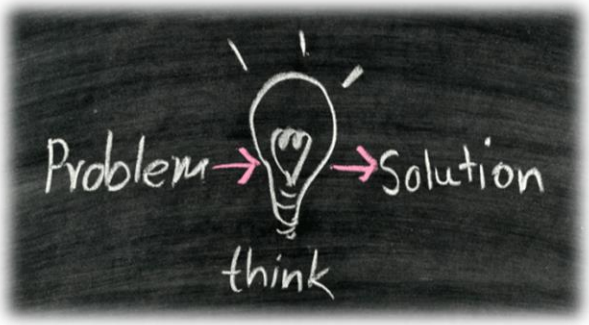
α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. (Μονάδες 7)



1459

α) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $x = -5$ και βρίσκουμε:

$$\lambda = (2(-5)+5)^2 - 8\cdot(-5) =$$
$$= (-10+5)^2 + 40 = (-5)^2 + 40 =$$
$$= 25 + 40 = 65$$

β) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $\lambda = 20$ και βρίσκουμε:

$$20 = (2x+5)^2 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20 = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$$

Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4\cdot 4\cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-12\pm\sqrt{64}}{2\cdot 4} = \frac{-12\pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{-12+8}{8} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-12-8}{8} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25-\lambda) = 0 \quad (2)$$

i) Έστω ότι ο εξαγόμενος αριθμός μπορεί να γίνει $\lambda = 5$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$4x^2 + 12x + (25-5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι αδύνατη διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

ii) Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + (25-\lambda)$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 25 - \lambda$.

Πρέπει η εξίσωση (2) να έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$\Delta_0 \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12^2 - 4\cdot 4\cdot(25-\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16\lambda \geq 256 \Leftrightarrow \lambda \geq 16$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

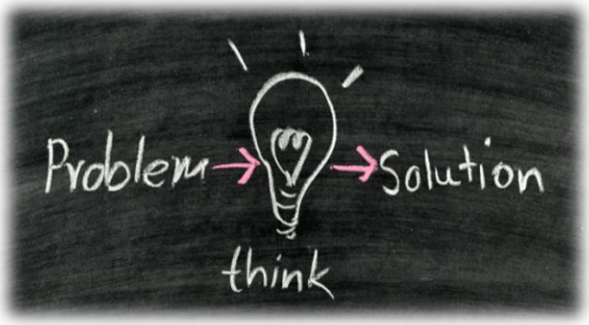
Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)



1460

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\beta}{1} = \beta$$

Είναι:

$$|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |S| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow (\beta = -4 \text{ ή } \beta = 4)$$

β) Επειδή η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες ισχύει ότι:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\beta|^2 > 4\gamma \Leftrightarrow 16 > 4\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma < 4$$

γ) • Για $\beta = 4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0 \ (2)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (2) $|x| = y$ (3) με $y>0$ και βρίσκουμε:

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \ (4)$$

Η εξίσωση (4) έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \text{δεκτές}$$

- Για $y = 3$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 3 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = -3)$$

- Για $y = 1$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1)$$

• Για $\beta = -4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - (-4)|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 4|x| + 3 = 0 \ (5)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (5) $|x| = \omega$ (6) με $\omega>0$ και βρίσκουμε:

$$\omega^2 + 4\omega + 3 = 0 \ (7)$$

Η εξίσωση (7) έχει διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = -1 \\ \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases} \text{απορρίπτονται}$$

1461

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

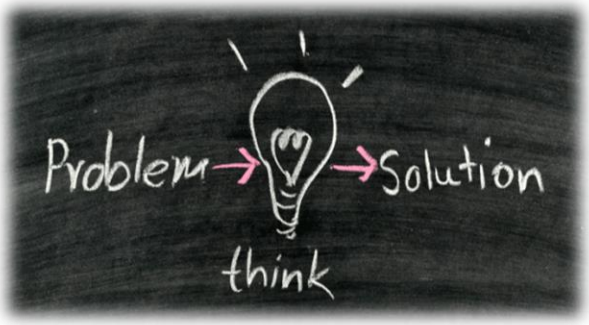
(Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

(Μονάδες 12)



1461

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4$$

Η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow (\lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2)$$

β) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) την επαληθεύει, ισχύει δηλαδή ότι:

$$\rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0 \quad (2) \text{ προφανώς } \rho \neq 0$$

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν:

$$\frac{1}{\rho^2} - \lambda\frac{1}{\rho} + 1 = 0 \overset{\cdot\rho^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda\rho + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0,$$

που ισχύει λόγω της (2).

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda > 0 \quad \text{και}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

Επειδή $S > 0$ και $P > 0$ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) Ισχύει ότι:

$$P = x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{x_1} \quad (3)$$

Τότε:

$$x_1 + 4x_2 \geq 4 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x_1 + 4\frac{1}{x_1} \geq 4 \overset{x_1>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 4 \geq 4x_1 \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

ΘΕΜΑ 4

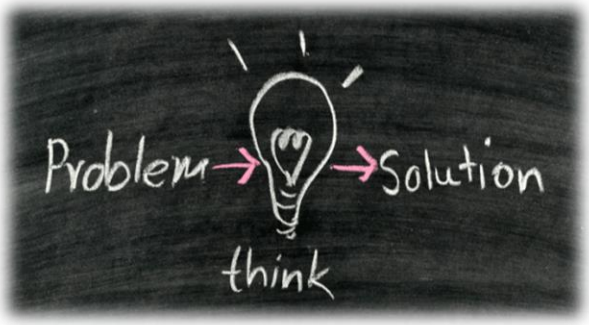
Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς *1* και *2*.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα *S* και το γινόμενο *P* των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in(1, 2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha<0$. (Μονάδες 9)

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2+\beta x+\alpha<0$. (Μονάδες 7)



1462

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 1 + 2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta = -3\alpha \quad (1)$$

και

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 1 \cdot 2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha \quad (2)$$

β) i) Ισχύει ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \alpha(x-1)(x-2) > 0 \quad (3)$$

Είναι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 2) \Leftrightarrow (0 < x - 1 \text{ και } x - 2 < 0)$$

Άρα $(x-1)(x-2) < 0$. Τότε από την (3) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha < 0$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha x^2 + (-3\alpha)x + \alpha < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(2x^2 - 3x + 1) < 0 \overset{\alpha<0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3+1}{4} = 1 \\ \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$$

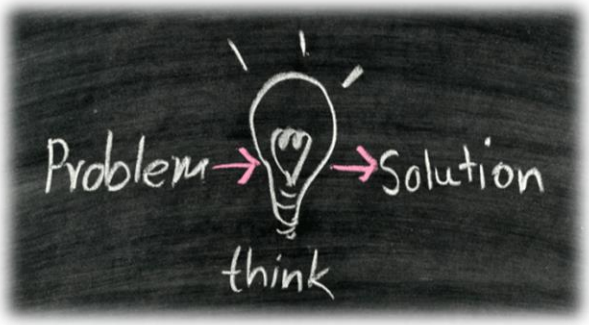
όπου *α, β* δύο **θετικοί** αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα *Δ* της εξίσωσης είναι: $\Delta=(\alpha^2-\beta^2)^2$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών *α, β,* ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των *α, β*. (Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1=\frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2=\frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1+x_1)(1+x_2)\geq 4.$$ (Μονάδες 7)



1463

α) Είναι:

$$\Delta = [-(\alpha^2+\beta^2)]^2 - 4\cdot\alpha\beta\cdot\alpha\beta =$$
$$= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 =$$
$$= \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2-\beta^2)^2$$

β) Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta \neq 0 \ \text{ και } \ \alpha+\beta \neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha \neq \beta \ \text{ και } \ \alpha \neq -\beta)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-[-(\alpha^2+\beta^2)]\pm\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2}}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha^2+\beta^2\pm(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha\beta} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{2\beta^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Ισχύει ότι:

$$(1+x_1)(1+x_2) \geq 4 \Leftrightarrow \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta} \geq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 2 \overset{\alpha\beta>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta\frac{\beta}{\alpha} + \alpha\beta\frac{\alpha}{\beta} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε θετικούς αριθμούς α, β.

1465

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

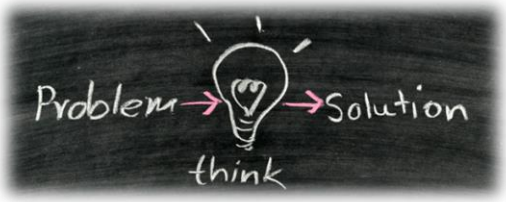
β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει

$$\alpha<x_1<x_2<\beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



α) Το τριώνυμο $3x^2+\kappa x-4$ έχει $\alpha=3$, $\beta=\kappa$, $\gamma=-4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\kappa^2-4\cdot 3\cdot(-4)=\kappa^2+48$$

Επειδή ισχύει $\Delta>0$, για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-4}{3}<0$$

Άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ) Επειδή $x_1<x_2$ και οι ρίζες είναι ετερόσημες, ισχύει ότι:

$$x_1<0 \text{ και } x_2>0$$

Επίσης είναι: $\alpha<x_1<x_2<\beta$, άρα:

$$\alpha<0 \text{ και } \beta>0 \quad (1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	α		x_1		x_2		β	$+\infty$
$3x^2+\kappa x-4$		$+$		0	$-$	0		$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$f(\alpha)>0 \text{ και } f(\beta)>0 \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)<0$$

ΘΕΜΑ 4

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}12+0,5x & \text{αν } 0\le x\le 30\\ 0,7x+6 & \text{αν } x>30\end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

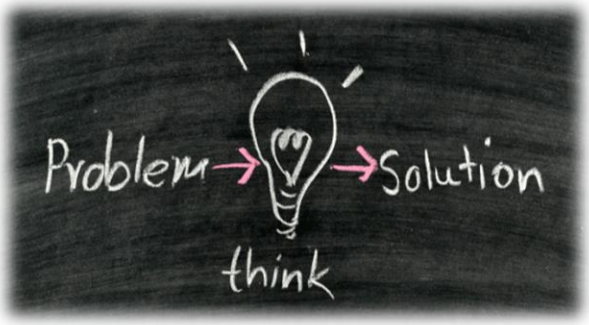
ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

ii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x)=12+0,6x,\ \text{για } x\ge 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)



1467

α) **i)** Αν κάποιος λείπει από το σπίτι του έχει κατανάλωση $x = 0$ κυβικά νερού. Επειδή $0 \in [0, 30]$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $12 + 0{,}5x$ και το ποσό που θα πληρώσει είναι:

$$f(0) = 12 + 0{,}5 \cdot 0 = 12 \text{ ευρώ}$$

ii) Επειδή $10 \in [0, 30]$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $12 + 0{,}5x$ και το ποσό που θα πληρώσει για κατανάλωση 10 κυβικών μέτρων νερού είναι:

$$f(10) = 12 + 0{,}5 \cdot 10 = 12 + 5 = 17 \text{ ευρώ}$$

iii) Επειδή $50 \in (30, +\infty)$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $0{,}7x + 6$ και το ποσό που θα πληρώσει για κατανάλωση 50 κυβικών μέτρων νερού είναι:

$$f(50) = 0{,}7 \cdot 50 + 6 = 35 + 6 = 41 \text{ ευρώ}$$

β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Ο κάτοικος της πόλης Α κατανάλωσε x κυβικά νερού με $x \in [0, 30]$. Επειδή ο κάτοικος της πόλης **Α** πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 12 + 0{,}5x > 12 + 0{,}6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 12 > 0{,}7x - 0{,}6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 > 0{,}1x \Leftrightarrow x < 0,$$

άτοπο διότι $x \in [0, 30]$.

Επομένως ο κάτοικος της πόλης Α δεν μπορεί να κατανάλωσε από έως και 30 κυβικά νερού.

2η περίπτωση

Ο κάτοικος της πόλης Α κατανάλωσε x κυβικά νερού με $x \in (30, +\infty)$. Επειδή ο κάτοικος της πόλης **Α** πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0{,}7x + 6 > 12 + 0{,}6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}7x - 0{,}6x > 12 - 6 \Leftrightarrow$$

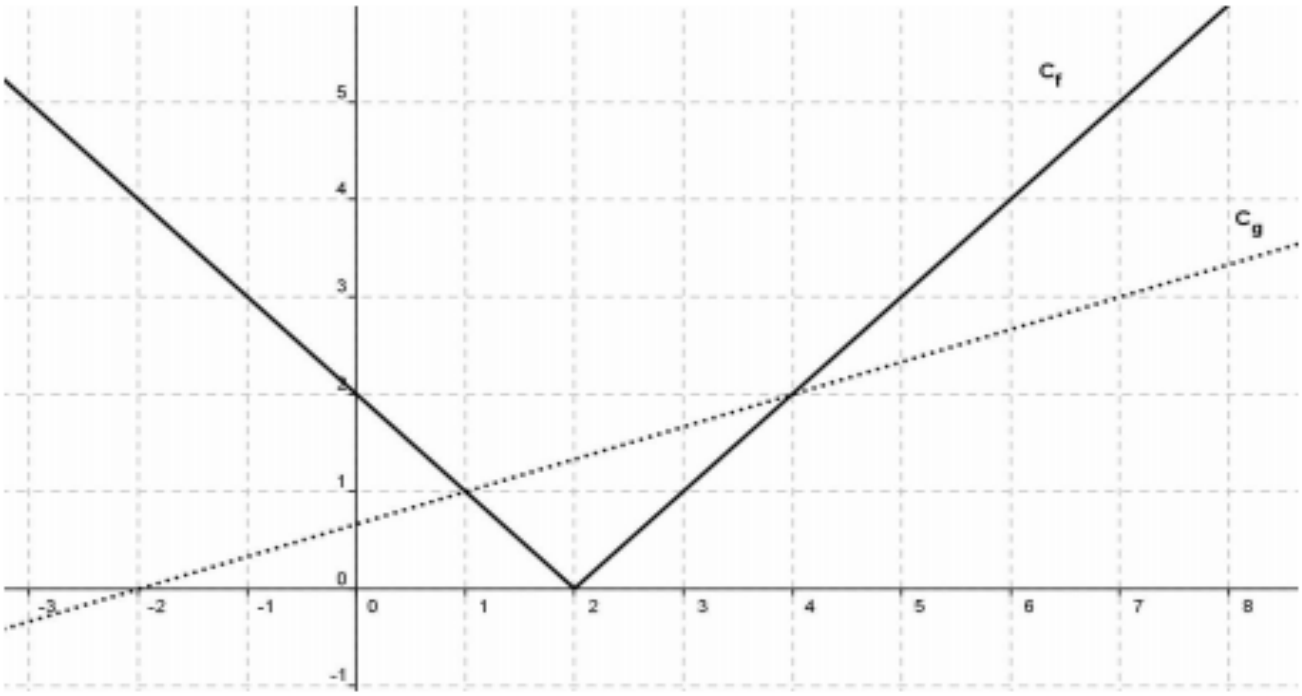
$$\Leftrightarrow 0{,}1x > 6 \Leftrightarrow x > 60$$

Επομένως, τόσο ο κάτοικος της πόλης Α όσο και της Β κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά νερού.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}, \quad x\in\mathbb{R}$$



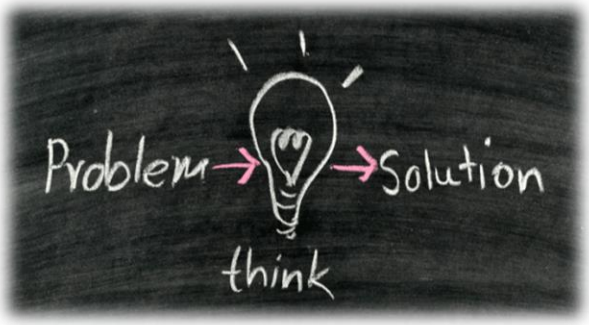
α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g. (Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g. (Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$$ (Μονάδες 5)



1468

α) Παρατηρώντας το σχήμα, τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι κατ' εκτίμηση τα $A(1, 1)$ και $B(4, 2)$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = R$ και η g το $B = R$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x-2| = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad (1)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Για $x \geq 2$, είναι $|x-2| = x-2$ οπότε η (1) γράφεται:

$$x - 2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x - 6 = x + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x - x = 6 + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4, \text{ δεκτή}$$

Για $x = 4$ είναι $f(4) = |4-2| = 2$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $A(4, 2)$.

2η περίπτωση

Για $x \leq 2$, είναι $|x-2| = -(x-2) = 2-x$ οπότε η (1) γράφεται:

$$2 - x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6 - 3x = x + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6 - 2 = x + 3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δεκτή}$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1-2| = 1$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $B(1, 1)$.

γ) Από το διάγραμμα που δίνεται διαπιστώνουμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g αν και μόνο αν $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

δ) Η παράσταση Κ έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$3|2-x| - (x+2) \geq 0 \Leftrightarrow 3|2-x| \geq (x+2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2-x| \geq \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Επομένως αναζητούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g καθώς και τα σημεία στα οποία είναι ίσες. Από το σκέλος (γ) βρίσκουμε ότι

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$$

1469

ΘΕΜΑ 4

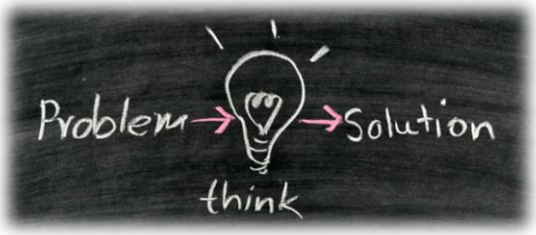
Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)



α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = 2\lambda - 1$, $\gamma = \lambda - 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda - 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) =$$
$$= 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1$$

Άρα η διακρίνουσα Δ είναι σταθερή.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(2\lambda-1) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot \lambda} = \frac{1 - 2\lambda \pm 1}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{2-2\lambda}{2\lambda} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \\ \frac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

γ) Η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι $|x_2 - x_1|$. Τότε:

$$|x_2 - x_1| = 2 \Leftrightarrow \left|-1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{-\lambda - 1 + \lambda}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\lambda} = 2 \text{ ή } \frac{1}{\lambda} = -2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2}\right)$$

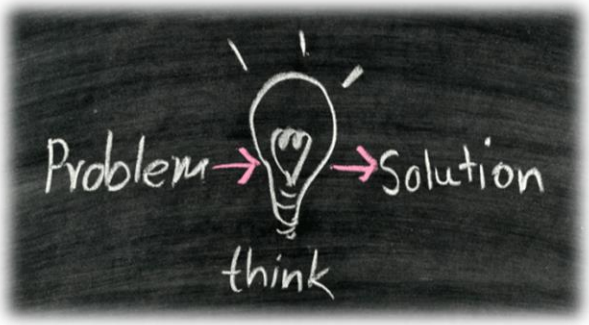
ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (Μονάδες 10)



1470

α) Για $\alpha = 1$ ο τύπος της g γράφεται: $g(x) = x + 1,\ x \in R$.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = R$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \quad \text{και} \quad y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = 0 \ \text{ή}\ x - 1 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \ \text{ή}\ x = 1)$$

- Για $x = 0$ είναι $g(0) = 0 + 1 = 1$.
- Για $x = 1$ είναι $g(1) = 1 + 1 = 2$.

Επομένως τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα:

$$A(0, 1) \quad \text{και} \quad B(1, 2)$$

β) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο σημεία αν και μόνο αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει δύο λύσεις. Τότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \alpha = 0 \quad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - \alpha) =$$
$$= 1 - 4 + 4\alpha = 4\alpha - 3$$

Για να έχει λοιπόν η εξίσωση (1) δύο λύσεις πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 3 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4}$$

γ) Επειδή $\alpha > 1 > \frac{3}{4}$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες τις x_1, x_2. Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 - \alpha < 0$$

Οπότε οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ετερόσημες.

1471

ΘΕΜΑ 4

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa>1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

(Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1=2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega=7$. (Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

α) Είναι:

$$\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 =$$
$$= (\kappa+1-\kappa)(\kappa+1+\kappa) = 2\kappa+1 \quad (1)$$

Άρα η διαφορά ω είναι περιττός αριθμός.

β) i) Ισχύει ότι:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Η τιμή $\kappa = -1$ απορρίπτεται διότι πρέπει $\kappa > 1$. Άρα $\kappa = 3$.

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\omega = 2\cdot 3 + 1 \Leftrightarrow \omega = 7$$

ii) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = 1017 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1017 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + (\nu-1)7 = 1017 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + 7\nu - 7 = 1017 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\nu = 1022 \Leftrightarrow \nu = 511$$

Άρα ο 511ος όρος είναι ίσος με 1017.

1472

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$ (Μονάδες 5)

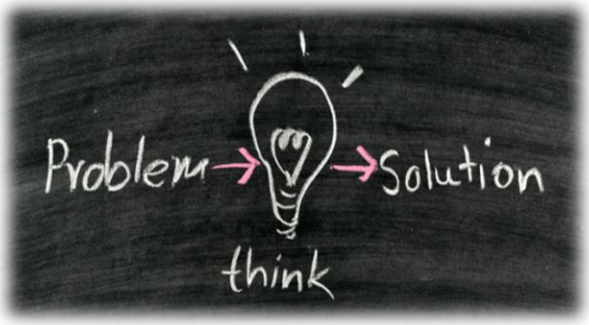
γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$|x - 3| \leq 5$$ (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$||x| - 3| \leq 5$$

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 8)



1472

α) Είναι:

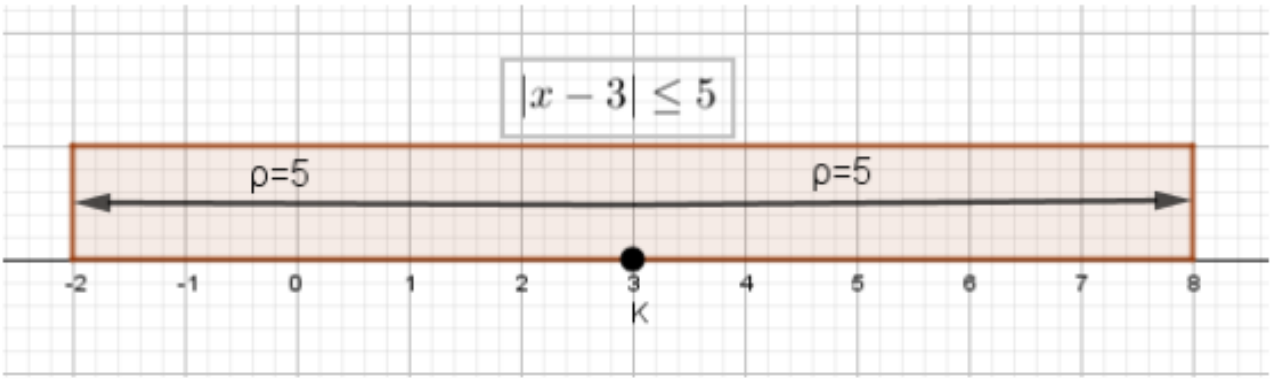
$$|x-3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le x-3 \le 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5+3 \le x-3+3 \le 5+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \le x \le 8 \Leftrightarrow x \in [-2, 8]$$

β) Ισχύει ότι:

Η ανίσωση $|x-3| \le 5$ περιγράφει το σύνολο των αριθμών x που ανήκουν σε διάστημα με κέντρο K(3) και ακτίνα ρ = 5, δηλαδή το διάστημα [– 2, 8].



γ) Οι ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα [– 2, 8] είναι οι:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

δ) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$||x|-3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le |x|-3 \le 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5+3 \le |x|-3+3 \le 5+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \le |x| \le 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2 \le |x| \quad \text{και} \quad |x| \le 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{ισχύει για κάθε } x \in R \quad \text{και} \quad -8 \le x \le 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8 \le x \le 8 \Leftrightarrow x \in [-8, 8]$$

ΘΕΜΑ 4

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

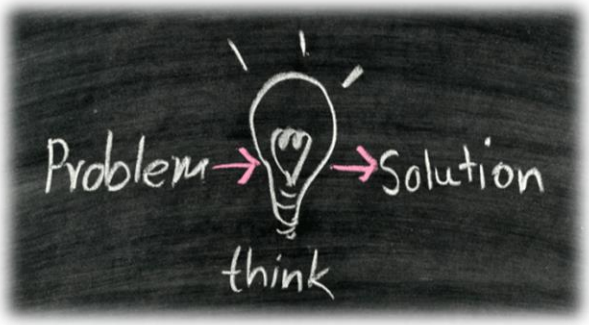
i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2+2x+3$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2} \leq 2$ (Μονάδες 6)



1473

α) Η εξίσωση:

$$x^2 + 2x + 3 = \alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - \alpha = 0 \quad (1)$$

έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - \alpha) =$$
$$= 4 - 12 + 4\alpha = 4\alpha - 8$$

i) Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha > 8 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

ii) Η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$$.Τότε η διπλή ρίζα είναι: $x = -1$

β) i) Είναι:

$$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{f(x) - 2} \leq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x) - 2}\right)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) - 2 \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \leq 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$$

1474

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S= x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών . (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}$ (Μονάδες 6)

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2+1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 =$$
$$= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R-\{0\}$ ισχύει $\Delta = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \text{ και}$$
$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Επειδή είναι $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$ για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι θετικές.

δ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2} \overset{(\gamma)}{\Leftrightarrow} \sqrt{1} \leq \frac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda \leq \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda > 0$

1475

ΘΕΜΑ 4

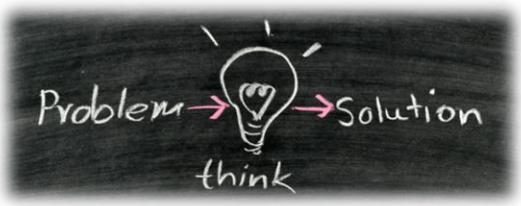
Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S= x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1+x_2}{2}$ και 1. (Μονάδες 6)



α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2+1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 =$$
$$= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R-\{0\}$ ισχύει $\Delta = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$
$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Επειδή είναι $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$ για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι θετικές.

δ) Είναι:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{S}{2} = \frac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2} = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda}$$

Τότε:

$$\frac{x_1+x_2}{2} - 1 = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} - 1 = \frac{\lambda^2+1-2\lambda}{2\lambda} = \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda} > 0$$

διότι:

$$(\lambda-1)^2 > 0, \text{ για κάθε } \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda > 0 \text{ από υπόθεση}$$

Τελικά:

$$\frac{x_1+x_2}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} > 1$$

1476

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

(α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

(i) Να δείξετε ότι ο αριθμός - ρ είναι ρίζα της εξίσωσης

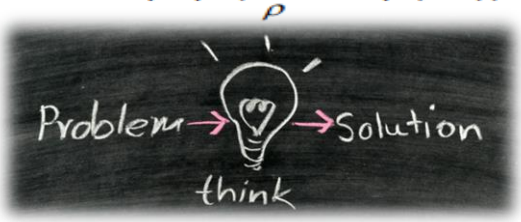
$$2x^2 - \lambda x - 36 = 0$$

(Μονάδες 7)

(ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

(Μονάδες 4+6=10)



i) Το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 36$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = \lambda$, $\gamma = -36$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36) = \lambda^2 + 288$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει $\Delta = \lambda^2 + 288 > 0$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) ισχύει ότι:

$$2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \quad (2)$$

ii) α) Ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$2(-\rho)^2 - \lambda(-\rho) - 36 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0,$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

β) • Έστω ότι $\rho = 0$. Τότε:

$$(2) \Leftrightarrow 2 \cdot 0^2 + \lambda \cdot 0 - 36 = 0 \Leftrightarrow -36 = 0, \text{ άτοπο}$$

Άρα $\rho \neq 0$.

• Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$-36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow -36\frac{1}{\rho^2} + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -36 + \lambda\rho + 2\rho^2 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

1477

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

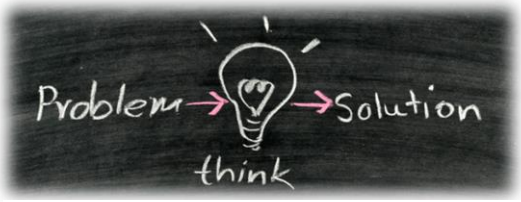
Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)



α) Έχουμε την εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Αν θέσουμε όπου $x^2 = u$ $με$ $u \geq 0$.

Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $u^2 - 8u - 9 = 0$.

Έχουμε α=1, β= -8 και γ= -9 οπότε Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 65 + 36 = 100$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$u_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \begin{cases} \frac{8+\sqrt{100}}{2} = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9 \ \ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ \frac{8-\sqrt{100}}{2} = \frac{8-10}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \ \ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \end{cases}$$

Όμως έχουμε $x^2 = u \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

β) Για την εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, αν θέσουμε όπου $x^2 = u$ $με$ $u \geq 0$, η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$u^2 + \beta u + \gamma = 0 \ (1).$$

i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$, με:

$$\beta^2 \geq 0 \ \kappa\alpha\iota$$

$$\gamma < 0 \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad -\gamma > 0.$$

Συνεπώς Δ>0 ως άθροισμα ενός μη αρνητικού και ενός θετικού αριθμού.

ii. Από τους τύπους Vieta το γινόμενο των ριζών της (1) είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma < 0$. Άρα οι ρίζες $u_{1,2}$ είναι ετερόσημες. Έστω $\begin{cases} u_1 < 0 \ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \\ u_2 > 0 \ \ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \end{cases}$

Τότε έχουμε $x^2 = u_2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{u_2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{u_2}$

1478

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο Π = 34 cm και διαγώνιο δ=13 cm

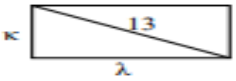
i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι E= 60 cm^2. (Μονάδες 5)

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm. (Μονάδες 10)

α) i) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε ότι:



$$\Pi = 34 \Leftrightarrow 2\kappa + 2\lambda = 34 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \kappa + \lambda = 17 \Leftrightarrow \kappa = 17 - \lambda \quad (1)$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε:

$$\kappa^2 + \lambda^2 = 13^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (17-\lambda)^2 + \lambda^2 = 169 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 289 - 34\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 = 169 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - 34\lambda + 120 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 17\lambda + 60 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{17+7}{2} = 12 \\ \frac{17-7}{2} = 5 \end{cases}$$

- Για $\lambda = 12$ από τη σχέση (1) βρίσκουμε $\kappa = 5$.
- Για $\lambda = 5$ από τη σχέση (1) βρίσκουμε $\kappa = 12$.

Σε κάθε περίπτωση το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = \kappa \cdot \lambda = 5 \cdot 12 = 60 \text{ cm}^2$$

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

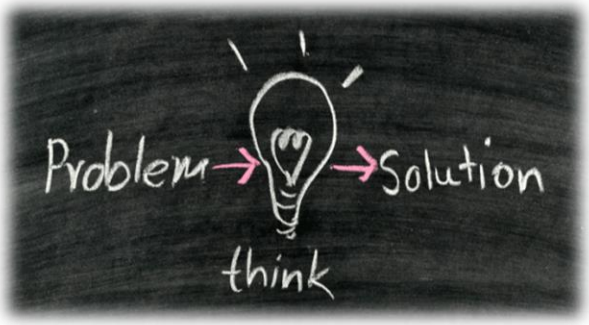
με

$$S = \kappa + \lambda = 17 \quad \text{και} \quad P = \kappa \cdot \lambda = 60$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 17x + 60 = 0$$

iii) Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι 5 cm και 12 cm.



1478

β) Έστω ότι υπάρχει ορθογώνιο με μήκη πλευρών α και β. Τότε πρέπει:

$$E_0 = 40 \Leftrightarrow \alpha\beta = 40 \quad (2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 80 = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 = 144 \overset{\alpha,\beta>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 12$$

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - 12x + 40 = 0$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta_0 = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 144 - 160 = -16 < 0$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει ορθογώνιο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.

ΘΕΜΑ 4

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ; (Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

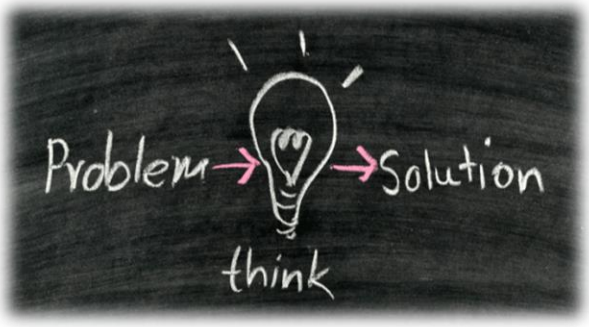
$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20\cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10\cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

(Μονάδες 5)



1479

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $x = 400$ και βρίσκουμε:

$$y = 60 + 0{,}20 \cdot 400 = 140 \text{ ευρώ}$$

β) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $y = 150$ και βρίσκουμε:

$$150 = 60 + 0{,}20 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = 0{,}20x \Leftrightarrow x = 450 \text{ km}$$

γ) Η εταιρία Α χρεώνει λιγότερα από την εταιρία Β αν και μόνο αν:

$$60 + 0{,}20x < 80 + 0{,}10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}20x - 0{,}10x < 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}10x < 20 \Leftrightarrow x < 200 \text{ km}$$

Συνεπώς η εταιρία Α χρεώνει λιγότερα από την Β αν ο πελάτης διανύσεις λιγότερα από 200 km. Με τον ίδιο συλλογισμό συμπεραίνουμε ότι η εταιρία Β χρεώνει λιγότερα από την Α αν ο πελάτης διανύσει περισσότερα από 200 km.

δ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0,+\infty)$ και η g το $B = [0,+\infty)$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0{,}20x = 80 + 0{,}10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}20x - 0{,}10x = 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}10x = 20 \Leftrightarrow x = 200$$

Για $x = 200$ είναι $f(200) = 60 + 0{,}20 \cdot 200 = 60 + 40 = 100$

Άρα το σημείο τομής είναι το $A(200, 100)$.

Το σημείο τομής εκφράζει ότι αν ο πελάτης διανύσει 200 km θα πληρώσει είτε στην εταιρία Α είτε στη Β το ποσό των 100 ευρώ.

1480

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

(α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

(i) Να δείξετε ότι ο αριθμός - ρ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$2x^2 - \lambda x - 36 = 0$$

(Μονάδες 7)

(ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

(Μονάδες 4+6=10)

i) Το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 36$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = \lambda$, $\gamma = -36$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36) = \lambda^2 + 288$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει $\Delta = \lambda^2 + 288 > 0$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) ισχύει ότι:

$$2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \quad (2)$$

ii) α) Ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$2(-\rho)^2 - \lambda(-\rho) - 36 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0,$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

β) • Έστω ότι $\rho = 0$. Τότε:

$$(2) \Leftrightarrow 2 \cdot 0^2 + \lambda \cdot 0 - 36 = 0 \Leftrightarrow -36 = 0, \text{ άτοπο}$$

Άρα $\rho \neq 0$.

• Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$-36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow -36\frac{1}{\rho^2} + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -36 + \lambda\rho + 2\rho^2 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

1481

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2$$

β) i) Για $\beta \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\Delta = -3\beta^2 < 0$$

Επειδή ο συντελεστή του x^2 είναι $1 > 0$ το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in R$.

ii) Για $\beta = 0$ είναι $\Delta = 0$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in R - \{0\}$ αφού για $x = 0$ μηδενίζεται.

γ) Θέτουμε στο αρχικό τριώνυμο $x = \alpha$ και βρίσκουμε:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η

Αν $\beta \neq 0$ τότε από το σκέλος (αii) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

Περίπτωση 2η

Αν $\beta = 0$ (οπότε $\alpha \neq 0$) τότε από το σκέλος (βii) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

1482

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

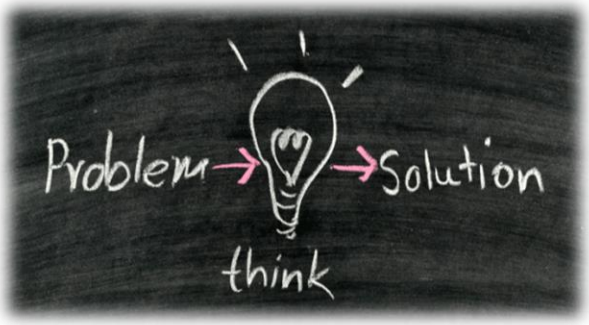
β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0\,,$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

(Μονάδες 15)



1482

α) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ (1). Τότε:

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 9y + 20 = 0$$

Η νέα εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$ και ρίζες:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{9+1}{2} = 5 \\ \frac{9-1}{2} = 4 \end{cases}$$

- Για $y = 5$ η σχέση (1) δίνει:

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow \left(x = -\sqrt{5} \text{ ή } x = \sqrt{5}\right)$$

- Για $y = 4$ η σχέση (1) δίνει:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 2)$$

Τελικά, η εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β) Θέτουμε $x^2 = \omega$, $(\omega \geq 0)$ οπότε η εξίσωση που θα κατασκευάσουμε θα είναι της μορφής:

$$\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$$

Επειδή θέλουμε να έχει μια θετική και μια αρνητική θεωρούμε για παράδειγμα τις $\omega_1 = -1$ και $\omega_2 = 4$. Με τη χρήση των τύπων Vieta βρίσκουμε:

$$S = \omega_1 + \omega_2 = -1 + 4 = 3 \text{ και}$$

$$P = \omega_1 \omega_2 = (-1) \cdot 4 = -4$$

Τότε η εξίσωση είναι η:

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega - 4 = 0$$

και η αντίστοιχη διτετράγωνη, θέτοντας $x^2 = \omega$ είναι:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\omega^2 - 3\omega - 4 = 0 \Leftrightarrow (\omega = -1 \text{ ή } \omega = 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = -1, \text{ αδύνατη ή } x^2 = 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 2)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x

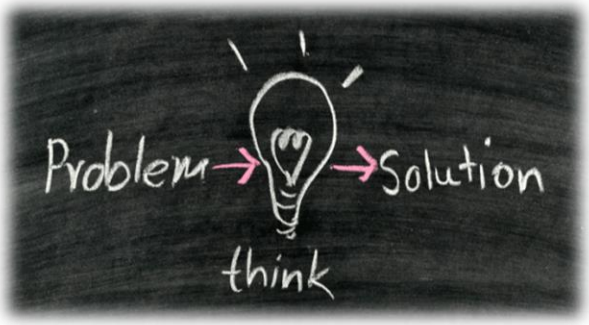
(Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8\,;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



1483

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow (x < -2 \text{ ή } x > 4) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

β) Ισχύει ότι:

$$\kappa = -\frac{8889}{4444} = -\frac{8888+1}{4444} = -\left(\frac{8888}{4444} + \frac{1}{4444}\right) = -2 - \frac{1}{4444} < -2$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (i) διαπιστώνουμε ότι για $\kappa < -2$ είναι:

$$\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$$

γ) Η δοθείσα παράσταση γράφεται:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8$$

Επομένως προκύπτει από το αρχικό τριώνυμο θέτοντας $x = |\mu|$.

Από το δεδομένο $-4 < \mu < 4$ συμπεραίνουμε ότι:

$$-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4 \Leftrightarrow 0 \le |\mu| < 4$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (α) διαπιστώνουμε ότι για $0 \le |\mu| < 4$ είναι:

$$|\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0$$

ΘΕΜΑ 4

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM>600$ *μέτρα*.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με $OA=600$ *μέτρα*.

Υποθέτουμε ότι, για $t \geq 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t *min* δίνεται από τον τύπο $S_λ(t) = 10\,t^2$ *μέτρα*, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t *min* δίνεται από τον τύπο $S_χ(t) = 600 + 40t$ *μέτρα*.

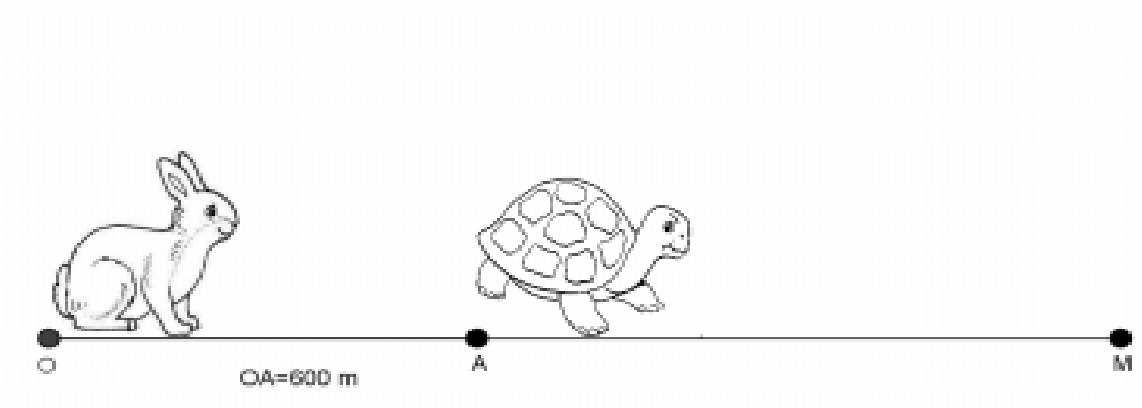
α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10)

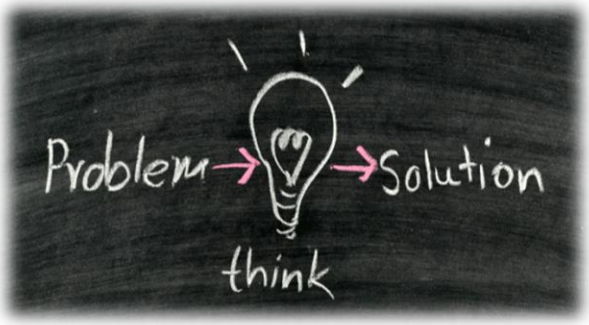
β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι $OM=2250$ *μέτρα*. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. (Μονάδες 5)

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12min$ και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση. (Μονάδες 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. (Μονάδες 5)





1484

α) Το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα θα πρέπει να βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση για την οποία ισχύει:

$$S_X(t) > S_\Lambda(t) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 16 + 240 = 256 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{4+16}{2} = 10 \\ \frac{4-16}{2} = -6 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	$-\infty$		-6		10		$+\infty$
$t^2 - 4t - 60$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$t^2 - 4t - 60 < 0 \Leftrightarrow -6 < t < 10 \Leftrightarrow t \in (-6, 10)$$

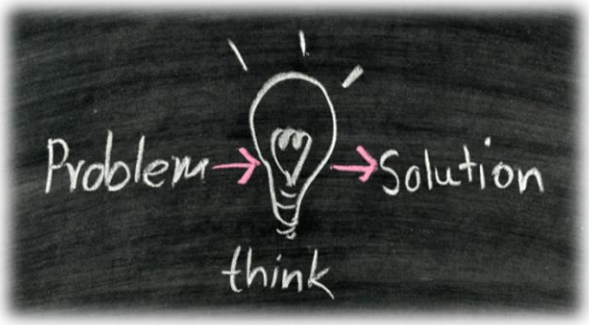
Επειδή όμως είναι $t \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι:

$$t \in [0, 10)$$

Τότε:

$$0 \leq t < 10 \Leftrightarrow 0 \leq 40t < 400 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 600 + 0 \leq 600 + 40t < 600 + 400 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 600 \leq S_\Lambda(t) < 1000 \Leftrightarrow$$

Άρα, το Μ μπορεί να απέχει λιγότερο από 1000 μέτρα από το σημείο Ο και η χελώνα θα έχει διαρκώς προβάδισμα.



1484

β) i) Ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$S_X(t) = S_\Lambda(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 600 + 40t = 10t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow t = 10 \text{ min}$$

ii) Είναι:

$$S_\Lambda(12) = 10 \cdot 12^2 = 10 \cdot 144 = 1440 \text{ μέτρα}$$

$$S_X(12) = 600 + 40 \cdot 12 = 600 + 480 = 1080 \text{ μέτρα}$$

Επομένως ο λαγός προηγείται της χελώνας και η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$1440 - 1080 = 360 \text{ μέτρα}$$

iii) Αναζητούμε τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$S_\Lambda(t) = 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 225 \Leftrightarrow t^2 = 15^2 \overset{t \geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow t = 15 \text{ min}$$

1485

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x)=|x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x. (Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 12)

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x αν και μόνο αν:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow (x-1 < -2 \text{ ή } x-1 > 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 3)$$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x αν και μόνο αν:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 > 0$$

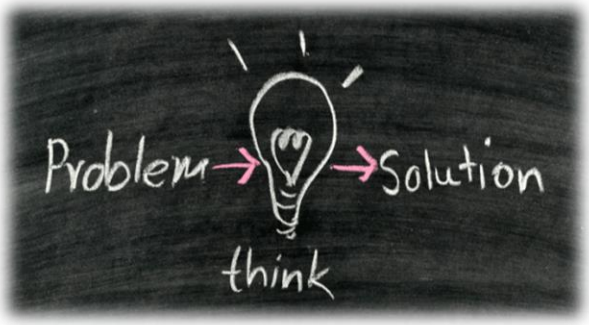
το οποίο ισχύει για κάθε $x \in R$ αφού $|x-1| \geq 0$ και $2 > 0$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0 \ (1)$$

Θέτουμε $|x-1| = y$ (2) οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$y^2 - y - 6 = 0$$



1485

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα (2) και βρίσκουμε:

- $|x - 1| = 3 \Leftrightarrow (x - 1 = -3 \text{ ή } x - 1 = 3) \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 4)$
- $|x - 1| = -2$, αδύνατη.

Αντικαθιστούμε $x = -2$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$g(-2) = |-2 - 1| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(-2) = |-3| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(-2) = 5$$

Αντικαθιστούμε $x = 4$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$g(4) = |4 - 1| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(4) = |3| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(4) = 5$$

Τελικά τα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες:

$$A(-2, 5) \text{ και } B(4, 5)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

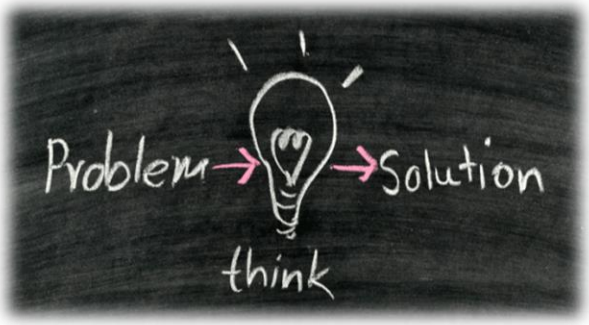
(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

(ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



1486

α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = \lambda - 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 3) =$$
$$= 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda$$

β) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4\lambda > -48 \Leftrightarrow \lambda < 12$$

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6 \text{ και}$$
$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 3}{1} = \lambda - 3$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι άνισες και θετικές αν και μόνο αν:

$$(\Delta > 0,\ S > 0 \text{ και } P > 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (48 - 4\lambda > 0,\ 6 > 0 \text{ και } \lambda - 3 > 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda < 12 \text{ και } \lambda > 3) \Leftrightarrow 3 < \lambda < 12, \text{ ισχύει}$$

ii) Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$ το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών x_1, x_2 και αρνητικό εντός των ριζών.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 - 6x + \lambda - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Επειδή $x_1 < \mu < x_2$ είναι:

$$\mu > 0, \text{ αφού } x_1, x_2 > 0$$

και από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\mu) < 0$$

- Επίσης, αφού $x_1 > 0$ θα πρέπει το 0 να είναι αριστερά του x_1, όπως φαίνεται στον πίνακα προσήμων. Επειδή $\kappa < 0$ από τον πίνακα προσήμων διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\kappa) > 0$$

Τελικά, είναι $\kappa < 0$, $\mu > 0$, $f(\kappa) > 0$, $f(\mu) < 0$, οπότε:

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$$

1487

ΘΕΜΑ 4

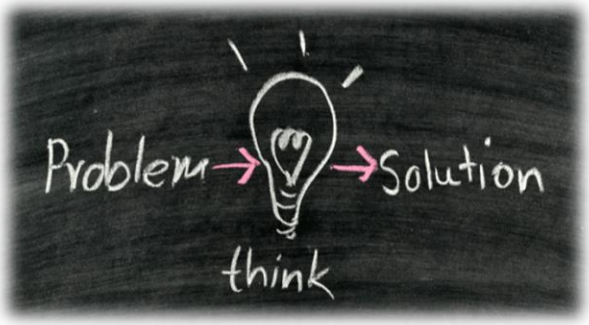
α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$ (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$$ (Μονάδες 7)



1487

α) i) Το τριώνυμο $x^2 + 9x + 18$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 9$, $\gamma = 18$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-9+3}{2} = -3 \\ \frac{-9-3}{2} = -6 \end{cases}$$

ii) Επειδή $|x + 3| \geq 0$ και $|x^2 + 9x + 18| \geq 0$ ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x + 3| = 0 \ \textbf{και} \ |x^2 + 9x + 18| = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 3 = 0 \ \textbf{και} \ x^2 + 9x + 18 = 0) \overset{(\alpha i)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \ \textbf{και} \ x = -3 \ \text{ή} \ x = -6) \Leftrightarrow x = -3$$

β) i) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-6		-3		$+\infty$
$x^2 + 9x + 18$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 9x + 18 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -3 \Leftrightarrow x \in (-6, -3)$$

$$x^2 + 9x + 18 > 0 \Leftrightarrow (x < -6 \ \text{ή} \ x > -3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-3, +\infty)$$

ii) Είναι:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2 + 9x + 18| = -(x^2 + 9x + 18) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 18 < 0 \overset{(\beta ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -6 < x < -3 \Leftrightarrow x \in (-6, -3)$$

ΘΕΜΑ 4

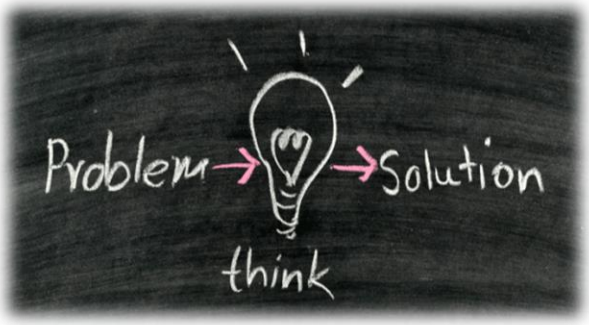
Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε v ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του v, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)



1488

α) Το πλήθος των μαθητών είναι:

$$x(x-1) \quad \text{ή} \quad (x+3)(x-3)-1$$

Πρέπει:

$$x(x-1)=(x+3)(x-3)-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=x^2-9-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x=-9-1 \Leftrightarrow x=10$$

β) Αντικαθιστούμε στον τύπο $x(x-1)$ όπου $x=10$ και βρίσκουμε:

$$10(10-1)=10\cdot 9=90 \text{ μαθητές}$$

γ) Το πλήθος των μαθητών στις ομάδες εργασίας αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=2$, $\omega=2$ και $S_\nu=90$. Τότε:

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90=\frac{\nu}{2}[2\cdot 2+(\nu-1)2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90=\frac{\nu}{2}(4+2\nu-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90=2\nu+\nu^2-\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot 1\cdot(-90)=1+360=361>0$$

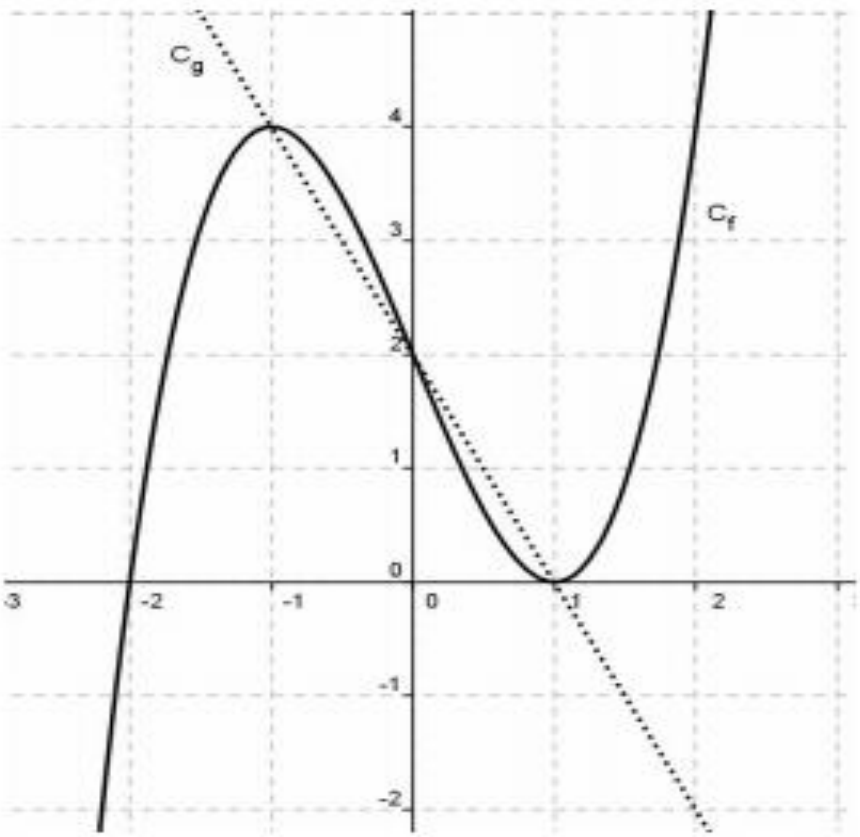
και ρίζες τις:

$$\nu_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 19}{2}=\begin{cases}\frac{-1+19}{2}=9\\ \frac{-1-19}{2}=-10\end{cases}$$

Η τιμή $\nu=-10$ απορρίπτεται διότι $\nu\in\mathbb{N}$. Άρα θα δημιουργηθούν $\nu=9$ ομάδες εργασίας.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)= -2x + 2$.



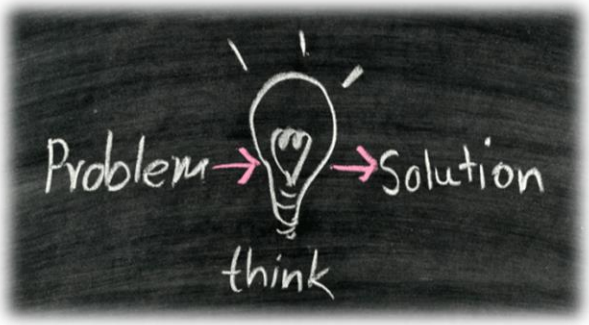
Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$. (Μονάδες 6)

β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. (Μονάδες 6)

γ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 6)

δ) Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)



1490

α) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

είναι τα σημεία τομής των C_f, C_g. Από τη γραφική παράσταση των f, g διαπιστώνουμε ότι τα ζητούμενα x είναι τα:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ \text{και}\ \ x_3 = 1$$

β) Από τη γραφική παράσταση της f διαπιστώνουμε ότι:

$$f(-1) = 4,\ f(0) = 2\ \ \text{και}\ \ f(1) = 0$$

γ) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν:

$$x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

δ) Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$f(x) + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Από τις γραφικές παραστάσεις των f και g διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν:

$$x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

1491

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

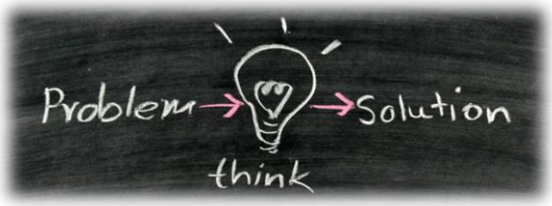
i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0.$$

(Μονάδες9)

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$.

(Μονάδες 9)



α) Το τριώνυμο $x^2 - 5\lambda x - 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5\lambda$, $\gamma = -1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 25\lambda^2 + 4$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει $\Delta = 25\lambda^2 + 4 > 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5\lambda}{1} = 5\lambda \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$$

i) Τότε:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

ii) Για $\lambda = 1$ είναι:

$$S = x_1 + x_2 = 5 \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = -1$$

Τότε:

$$x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2 =$$

$$= x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 =$$

$$= -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -16$$

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0,\ \lambda \in (0,4).$$

α) Να βρείτε:

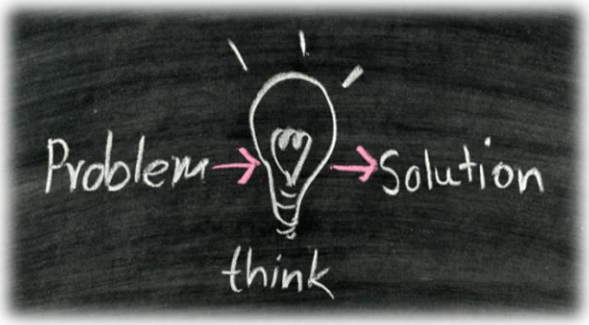
i) την περίμετρο *Π* του ορθογωνίου συναρτήσει του *λ*. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν *Ε* του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0,4)$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του *λ* η περίμετρος *Π* του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με *16*;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)



1492

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)}{1} = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{και}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) =$$

$$= 2 \cdot 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

ii) Το εμβαδόν είναι:

$$E = x_1x_2 = 16$$

Είναι:

$$\Pi \geq 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

β) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γράφεται:

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Δηλαδή η εξίσωση έχει διπλή ρίζα το οποίο σημαίνει ότι $x_1 = x_2 = 4$ κι επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

1493

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0 \quad \text{με} \quad \lambda \in (0, 2)$$

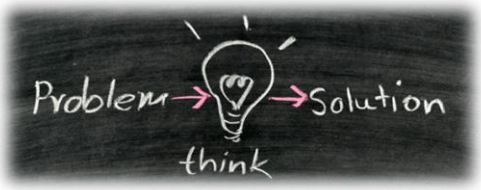
α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \le 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$ (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)



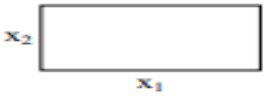
α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda(2-\lambda)}{1} = \lambda(2-\lambda)$$

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2 = 4$$



ii) Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου είναι:

$$E = x_1 x_2 = \lambda(2-\lambda)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$E \le 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) \le 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \ge 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ) Είναι:

$$E = 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $x_1 = x_2 = 1$ οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

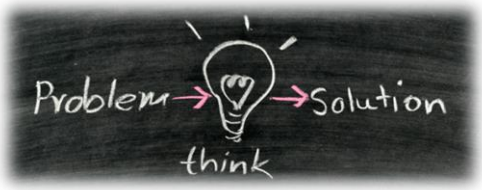
1494

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{5+7}{2} = 6 \\ \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$x^2 - 5x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 6 \Leftrightarrow x \in (-1, 6)$$

Ο αριθμός Κ προκύπτει με αντικατάσταση στο τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ όπου $x = -\frac{46}{47}$.

Ο αριθμός $-\frac{46}{47}$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 6)$ όπου η παράσταση Κ είναι αρνητική. Άρα:

$$K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6 < 0$$

ii) Η παράσταση:

$$\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6 = |\alpha|^2 - 5|\alpha| - 6$$

προκύπτει με αντικατάσταση στο τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ όπου $x = |\alpha|$. Ισχύει ότι:

$$\alpha \in (-6, 6) \Leftrightarrow -6 < \alpha < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| < 6 \Leftrightarrow 0 \le |\alpha| < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| \in [0, 6) \subset (-1, 6)$$

Στο διάστημα αυτό, όπως διαπιστώνουμε από τον πίνακα προσήμων, το τριώνυμο είναι αρνητικό, άρα:

$$\Lambda < 0$$

ΘΕΜΑ 4

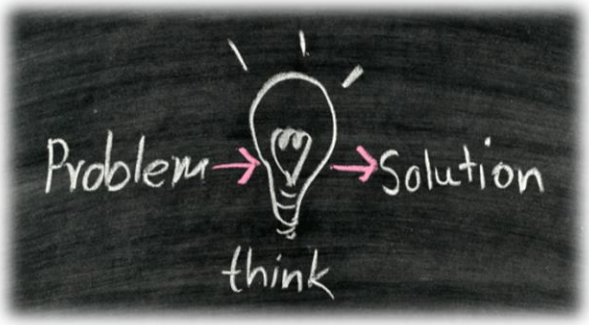
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη *x, y* τέτοια, ώστε: $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του *x* δίνεται από τον τύπο:

$$E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x),\ x\in(0,10).$$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E(x)\le\frac{25}{2}$ για κάθε $x\in(0,10)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x\in(0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; (Μονάδες 8)



1495

α) Ισχύει ότι:

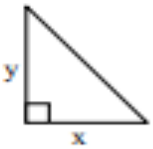
$$x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \quad (1)$$

Πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$$

Άρα $0 < x < 10 \Leftrightarrow x \in (0, 10)$.

Το εμβαδόν ενός τριγώνου με μήκη πλευρών x και y υπολογίζεται από τον τύπο:



$$E(x) = \frac{1}{2}xy \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = \frac{1}{2}x(10 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2),\ x \in (0, 10)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$E(x) \le \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) \le \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x - x^2 \le 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 \ge 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in (0, 10)$$

γ) Είναι:

$$E(x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x - x^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Επομένως για $x = 5$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Για $x = 5$ η σχέση (1) δίνει: $y = 10 - 5 = 5$. Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία *TAXI* με το όνομα *'RED'* χρεώνει *1 ευρώ* με την είσοδο στο *TAXI* και *0,6 ευρώ* για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.
Μια άλλη εταιρεία *TAXI* με το όνομα *'YELLOW'* χρεώνει *2 ευρώ* με την είσοδο στο *TAXI* και *0,4 ευρώ* για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.
Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία *'RED'* για μια διαδρομή *x* χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Μονάδες 3)

x (km)	0	2	8
$f(x)$ *(ευρώ)*			

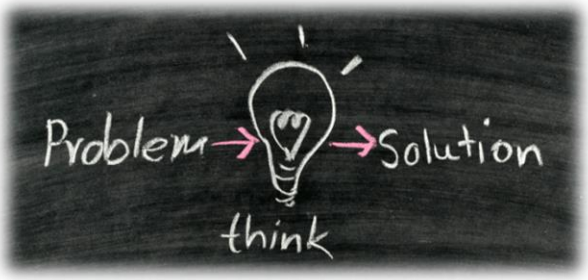
ii) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία *'YELLOW'* για μια διαδρομή *x* χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Μονάδες 3)

x (km)			
$g(x)$ *(ευρώ)*	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x), g(x)$.
(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας *'RED'* είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες *A* και *B* μετακινηθούν με την εταιρεία *'RED'* και ο πελάτης *A* διανύσει *3* χιλιόμετρα παραπάνω από τον *B*, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο *A* σε σχέση με τον *B*. (Μονάδες 3)



1496

α) i) • Για απόσταση x = 0 km, δηλαδή μόλις ο πελάτης μπει στο ταξί, η χρέωση είναι 1 ευρώ.

- Για απόσταση x = 2 km, ο πελάτης θα πληρώσει 2 · 0,6 = 1,2 ευρώ και την είσοδο στο ταξί 1 ευρώ. Άρα, συνολικά θα πληρώσει 2,2 ευρώ.
- Για απόσταση x = 8 km, ο πελάτης θα πληρώσει 8 · 0,6 = 4,8 ευρώ και την είσοδο στο ταξί 1 ευρώ. Άρα, συνολικά θα πληρώσει 5,8 ευρώ.

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) • Αφού ο πελάτης πλήρωσε 2 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο στο ταξί αυτό σημαίνει ότι ο πελάτης απλά μπήκε στο ταξί χωρίς να διανύσει χιλιόμετρα. Άρα x = 0 km.

• Αφού ο πελάτης πλήρωσε 3,2 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο στο ταξί αυτό σημαίνει ότι πλήρωσε 3,2 − 2 = 1,2 ευρώ για τα χιλιόμετρα που διάνυσε. Επειδή εταιρεία χρεώνει 0,4 ευρώ το χιλιόμετρο ο πελάτης διάνυσε 1,2 : 0,4 = 3 χιλιόμετρα.

• Αφού ο πελάτης πλήρωσε 4,8 ευρώ και η εταιρεία χρεώνει 2 ευρώ την είσοδο στο ταξί αυτό σημαίνει ότι πλήρωσε 4,8 − 2 = 2,8 ευρώ για τα χιλιόμετρα που διάνυσε. Επειδή εταιρεία χρεώνει 0,4 ευρώ το χιλιόμετρο ο πελάτης διάνυσε 2,8 : 0,4 = 7 χιλιόμετρα.

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

x (km)	0	3	7
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Επειδή οι τιμές που αναγράφονται στο πρόβλημα ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα ισχύει ότι το πεδίο ορισμού είναι:

$$A_f = A_g = [0, 15)$$

Προσδιορισμός της f

Ο πελάτης πληρώνει 0,6 ευρώ αν διανύσει 1 χιλιόμετρο. Αν διανύσει x χιλιόμετρα θα πληρώσει 0,6 · x ευρώ. Επιπλέον με την είσοδό του στο ταξί θα πληρώσει 1 ευρώ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = 1 + 0{,}6x,\ \ x \in [0, 15)$$

Προσδιορισμός της g

Ο πελάτης πληρώνει 0,4 ευρώ αν διανύσει 1 χιλιόμετρο. Αν διανύσει x χιλιόμετρα θα πληρώσει 0,4 · x ευρώ. Επιπλέον με την είσοδό του στο ταξί θα πληρώσει 2 ευρώ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο τύπος της g είναι:

$$g(x) = 2 + 0{,}4x,\ \ x \in [0, 15)$$

γ) Αντικαθιστούμε στον τύπο της f:

- $x = 0$ και βρίσκουμε $f(0) = 1 + 0,6 \cdot 0 = 1$
- $x = 5$ και βρίσκουμε $f(5) = 1 + 0,6 \cdot 5 = 4$

Άρα η γραφική παράσταση της f που είναι μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία Α(0, 1) και Β(5, 4).

Αντικαθιστούμε στον τύπο της g:

- $x = 0$ και βρίσκουμε $g(0) = 2 + 0,4 \cdot 0 = 2$
- $x = 5$ και βρίσκουμε $g(5) = 2 + 0,4 \cdot 5 = 4$

Άρα η γραφική παράσταση της g που είναι μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία Γ(0, 2) και Δ(5, 4).

Οι γραφικές παραστάσεις των f, g είναι:

Η εταιρεία RED είναι οικονομικότερη από τη YELLOW για το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g. Από τη γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει στο διάστημα [0, 5).

δ) Αν ο πελάτης Β διανύσει x χιλιόμετρα τότε ο πελάτης Α θα διανύσει x + 3 χιλιόμετρα.

Επομένως ο πελάτης Β θα πληρώσει:

$$B = 1 + 0,6x$$

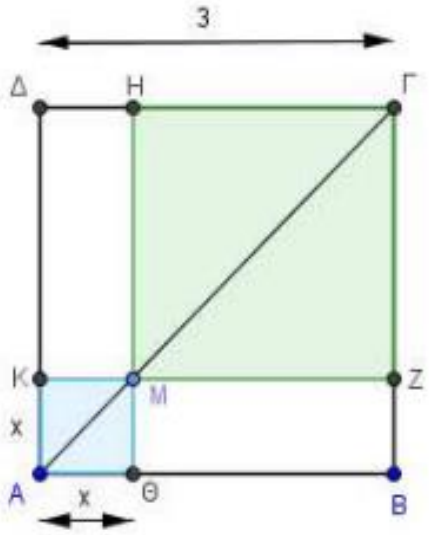
και ο πελάτης Α θα πληρώσει:

$$A = 1 + 0,6(x + 3) = 1 + 0,6x + 0,6 \cdot 3 = B + 1,8$$

Τελικά ο πελάτης Α θα πληρώσει 1,8 ευρώ περισσότερα από τον πελάτη Β.

ΘΕΜΑ 4

Στο επόμενο σχήμα το *ΑΒΓΔ* είναι τετράγωνο πλευράς *ΑΒ=3* και το *Μ* είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου *ΑΓ*. Έστω *Ε* το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

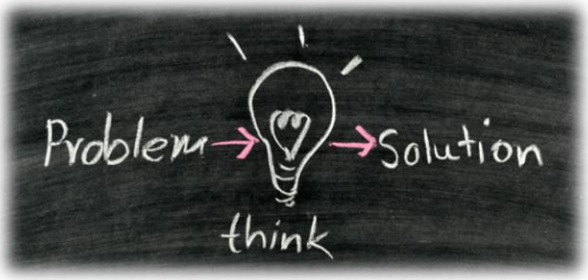


α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9,\ x \in (0,3)$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0,3)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του *Μ* πάνω στην *ΑΓ* το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



1497

α) Είναι:

$$E = E_{ΑΘΜΚ} + E_{ΜΖΓΗ} = ΑΘ^2 + ΓΗ^2 =$$
$$= x^2 + (3 - x)^2 =$$
$$= x^2 + 9 - 6x + x^2 =$$
$$= 2x^2 - 6x + 9$$

β) Έχουμε:

$$E \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 \geq 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x - 3)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \in (0, 3)$

γ) Ισχύει ότι:

$$E = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Για $x = \frac{3}{2}$ το σημείο Θ είναι μέσο του ΑΒ, οπότε και το Μ μέσο του ΑΓ.

1498

ΘΕΜΑ 4

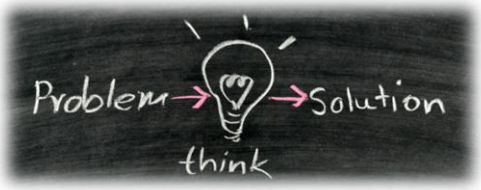
Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών *α, β* και εμβαδόν *Ε,* τέτοια ώστε οι αριθμοί *α, Ε, β,* με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι *Ε=1* (Μονάδες 10)

β) Αν *α + β = 10* τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη *α, β* (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη *α, β* (Μονάδες 10)



α) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α και β έχει εμβαδόν $E = \alpha\beta$ (1).

Οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$E^2 = \alpha\beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E^2 = E \overset{E\neq 0}{\Longleftrightarrow} E = 1$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = 10 \quad \text{και}$$

$$P = x_1x_2 = \alpha\beta = 1$$

Μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0 \quad (2)$$

ii) Τα α, β είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2). Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 96$$

και ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{96}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6} \\ \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Άρα τα μήκη είναι $5 + 2\sqrt{6}$ και $5 - 2\sqrt{6}$.

1499

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

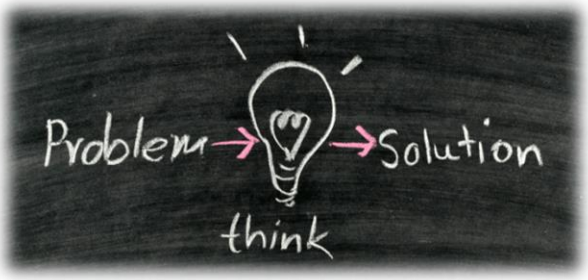
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ... τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu + 24) = \beta_7$ (Μονάδες 8)



1499

α) Οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x = \frac{2+8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = x - 2 = 5 - 2 = 3$$

β) Οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4$$

Ο λόγος λ της προόδου είναι:

$$\lambda = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

γ) i) Η αριθμητική πρόοδος (α_ν) έχει $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. Τότε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 2 + (\nu - 1)3] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(4 + 3\nu - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}(1 + 3\nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu + 3\nu^2}{2}$$

ii) Η γεωμετρική πρόοδος (β_ν) έχει $\beta_1 = 2$ και $\lambda = 2$. Είναι:

$$\beta_7 = \beta_1\lambda^{7-1} = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$$

Τότε:

$$2(S_\nu + 24) = \beta_7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\nu + 3\nu^2}{2} + 24\right) = 128 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu + 48 = 128 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 80 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80) = 1 + 960 = 961 > 0$$

και ρίζες τις

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 31}{6} = \begin{cases} \frac{-1+31}{6} = 5 \\ \frac{-1-31}{6} = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

Η λύση $\nu = -\frac{16}{3}$ απορρίπτεται διότι δεν είναι φυσικός αριθμός. Τελικά $\nu = 5$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

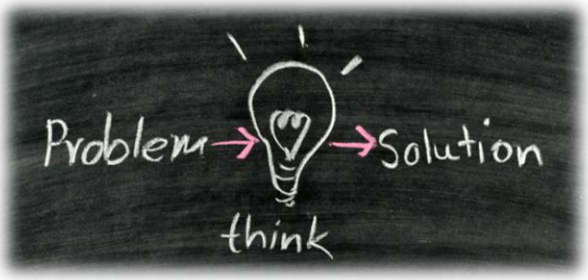
(Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \qquad (1)$$

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)



1500

α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = \lambda - 7$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 7) = 36 - 4\lambda + 28 = 64 - 4\lambda$$

Το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda \geq -64 \Leftrightarrow \lambda \leq 16$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 7}{1} = \lambda - 7$$

ii) Το τριώνυμο έχει δύο άνισες και ομόσημες ρίζες αν και μόνο αν:

$$(\Delta > 0 \ \text{ και } \ P > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (64 - 4\lambda > 0 \ \text{ και } \ \lambda - 7 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4\lambda > -64 \ \text{ και } \ \lambda > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 16 \ \text{ και } \ \lambda > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 < \lambda < 16$$

Επειδή $S = 6 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

γ) i) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε στη (2) $|x| = y$ και έχουμε:

$$y^2 - 6y + \lambda - 7 = 0 \quad (3)$$

Επομένως για να έχει η εξίσωση (2) τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες αρκεί η εξίσωση (3) να έχει δύο θετικές άνισες μεταξύ τους πραγματικές ρίζες. Από το σκέλος (iiβ) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$7 < \lambda < 16$$

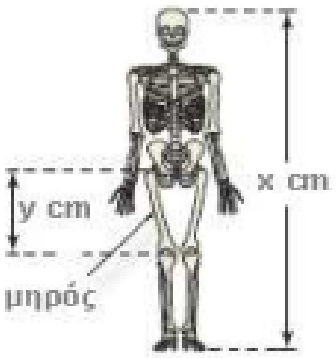
ii) Ισχύει ότι:

$$7 < 3\sqrt{10} < 16 \Leftrightarrow \sqrt{49} < \sqrt{90} < \sqrt{256}, \text{ το οποίο ισχύει}$$

Τελικά για $\lambda = 3\sqrt{10}$ η εξίσωση (2) οπότε και η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 4

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

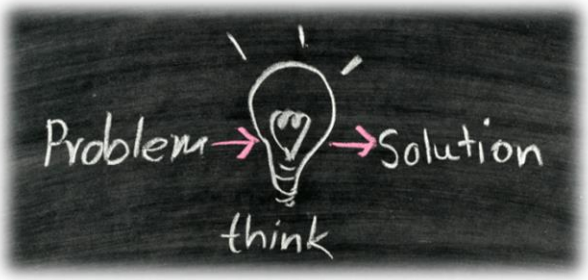
Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους *38,5*cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου *164*cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους *42,8*cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)



1501

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο $y = 0,43x - 26$ όπου $y = 38,5$ και βρίσκουμε:

$$38,5 = 0,43x - 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64,5 = 0,43x \Leftrightarrow x = 150$$

Άρα η γυναίκα έχει ύψος 150 cm.

β) Αν υποθέσουμε ότι το μηριαίο οστό με μήκος $y = 42,8$ cm ανήκει σε άνθρωπο με ύψος $x = 164$ cm, τότε θα πρέπει να επαληθεύεται η ισότητα $y = 0,45x - 31$.

Είναι:

$$42,8 = 0,45 \cdot 164 - 31 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 42,8 = 73,8 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 42,8, \text{ ισχύει}$$

γ) Ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους αν και μόνο αν:

$$0,43x - 26 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31 - 26 = 0,45x - 0,43x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,02x = 5 \Leftrightarrow x = 250 \text{ cm}$$

Είναι φυσικώς αδύνατον ένας άνδρας και μια γυναίκα να έχουν ύψος 250 cm! Δεν μπορεί επομένως ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους

1502

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί : $x^2+5,\ x^2+x,\ 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. (Μονάδες 6)

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \ldots + \alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

α) Οι αριθμοί $x^2+5,\ x^2+x,\ 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2+x=\frac{x^2+5+2x+4}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2+x)=x^2+2x+9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2x=x^2+2x+9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow (x=-3 \text{ ή } x=3)$$

β) Για $x = 3$ είναι:

$$\alpha_4 = 3^2+5 = 14 \text{ και}$$
$$\alpha_5 = 3^2+3 = 12\,.$$

i) Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 12 - 14 = -2$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\alpha_4 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (4-1)\omega = 14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 3(-2) = 14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 - 6 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$$

iii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S = \alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24} =$$
$$= \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{14}+\alpha_{15}+\ldots+\alpha_{24}-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{14}) =$$
$$= S_{24}-S_{14} =$$
$$= \frac{24}{2}[2\cdot 20+(24-1)\cdot(-2)] - \frac{14}{2}[2\cdot 20+(14-1)\cdot(-2)] =$$
$$= 12(40-46) - 7(40-26) = -72-98 = -170$$

ΘΕΜΑ 4

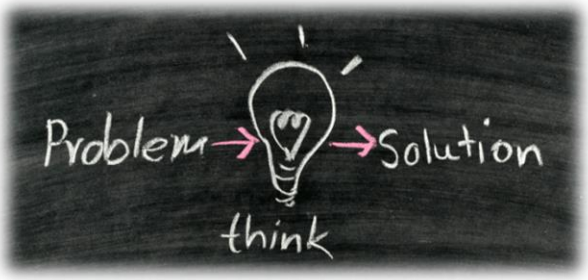
Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο $3^{ος}$ όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο $8^{ος}$ όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31)$$ (Μονάδες 10)



1503

α) Είναι:

$$\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + (3-1)\omega = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8 - 2\omega \quad (1)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\alpha_8 = 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + (8-1)\omega = 23 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 8 - 2\omega + 7\omega = 23 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 8 - 2 \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$$

β) Είναι:

$$\alpha_{31} = \alpha_1 + (31-1)\omega =$$

$$= 2 + 30 \cdot 3 = 2 + 90 = 92$$

γ) Έχουμε:

$$S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31) =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{31}) + (1 + 2 + 3 + \ldots + 31) = S_1 + S_2$$

όπου

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{31} = \frac{31}{2}[2 \cdot 2 + (31-1) \cdot 3] = \frac{31}{2}(4 + 30 \cdot 3) = \frac{31}{2} \cdot 94 = 1457$$

$$S_2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 31 = \frac{31}{2}(1 + 31) = \frac{31}{2} \cdot 32 = 496$$

Τελικά:

$$S = 1497 + 496 = 1953$$

1504

ΘΕΜΑ 4

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, $s_Γ$, και $s_Δ$ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A < s_B$$

$$s_Γ = \frac{s_Δ + 3s_B}{4} \quad \text{και}$$

$$|s_Δ - s_A| = |s_Δ - s_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α, Β, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.

α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

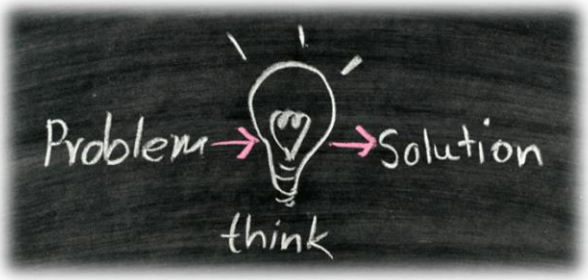
β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις

$$s_A + s_B = 1{,}4 \quad \text{και} \quad s_A \cdot s_B = 0{,}45 \text{ τότε:}$$

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B

(Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, $s_Γ$, και $s_Δ$. (Μονάδες 7)



1504

α) Ισχύει ότι:

$$|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s_\Delta - s_A = s_\Delta - s_B \text{ ή } s_\Delta - s_A = -(s_\Delta - s_B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s_A = s_B, \text{ απορρίπτεται ή } s_\Delta - s_A = -s_\Delta + s_B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2s_\Delta = s_A + s_B \Leftrightarrow s_\Delta = \frac{s_A+s_B}{2}$$

Είναι:

$$s_A - s_\Delta = s_A - \frac{s_A+s_B}{2} =$$

$$= \frac{2s_A - s_A - s_B}{2} = \frac{s_A - s_B}{2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_A < s_\Delta \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$s_\Delta - s_\Gamma = \frac{s_A+s_B}{2} - \frac{s_A+3s_B}{4} =$$

$$= \frac{2s_A+2s_B-s_A-3s_B}{4} = \frac{s_A-s_B}{4} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_\Delta < s_\Gamma \quad (2)$$

Είναι:

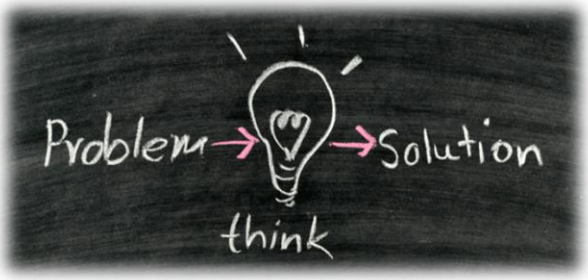
$$s_\Gamma - s_B = \frac{s_A+3s_B}{4} - s_B =$$

$$= \frac{s_A+3s_B-4s_B}{4} = \frac{s_A-s_B}{4} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s_\Gamma < s_B \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) βρίσκουμε:

$$s_A < s_\Delta < s_\Gamma < s_B$$



1504

β) **i)** Μια εξίσωση 2ου βαθμού είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - (s_A + s_B)x + s_A s_B = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1{,}4x + 0{,}45 = 0 \ (4)$$

ii) Η εξίσωση (4) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1{,}4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}45 = 0{,}16$$

και ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1{,}4) \pm \sqrt{0{,}16}}{2 \cdot 1} = \frac{1{,}4 \pm 0{,}4}{2} = \begin{cases} \frac{1{,}4+0{,}4}{2} = 0{,}9 \\ \frac{1{,}4-0{,}4}{2} = 0{,}5 \end{cases}$$

Επειδή ισχύει $s_A < s_B$ είναι:

$$s_A = 0{,}5 \text{ km} \quad \text{και} \quad s_B = 0{,}9 \text{ km}$$

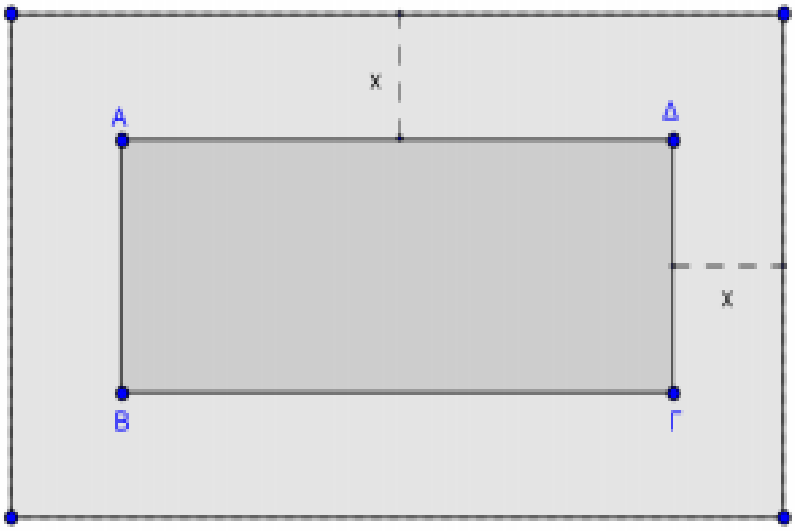
Τέλος βρίσκουμε:

$$s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4} = \frac{0{,}5 + 3 \cdot 0{,}9}{4} = 0{,}8 \text{ km}$$

$$s_\Delta = \frac{s_A + s_B}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}9}{2} = 0{,}7 \text{ km}$$

ΘΕΜΑ 4

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις *15m* και *25m*. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος *x m* $(x > 0)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

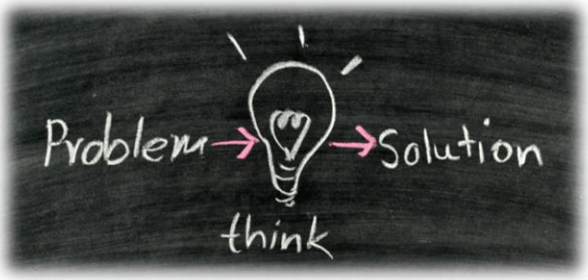


α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x, \quad x > 0$$ (Μονάδες 9)

β) Να βρεθεί το πλάτος *x* της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\ m^2$. (Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\ m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



1505

α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι:

$$E_1 = 15 \cdot 25 = 375 \text{ m}^2$$

Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $15 + 2x$, $25 + 2x$ και εμβαδόν:

$$E_2 = (15 + 2x)(25 + 2x) =$$
$$= 375 + 30x + 50x + 4x^2 =$$
$$= 4x^2 + 80x + 375$$

Το εμβαδόν της ζώνης είναι:

$$E = E_2 - E_1 =$$
$$= 4x^2 + 80x + 375 - 375 =$$
$$= 4x^2 + 80x,\ x > 0$$

β) Ισχύει ότι:

$$E = 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125) = 400 + 500 = 900 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{-20+30}{2} = 5 \\ \frac{-20-30}{2} = -25 \end{cases}$$

Επειδή $x > 0$ είναι $x = 5$ m.

γ) Είναι:

$$E(x) < 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x < 500 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 < 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ $+\infty$	0		5
$x^2 + 20x - 125$		$-$	0	$+$

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 20x - 125 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (0, 5)$$

1506

ΘΕΜΑ 4

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40cm$. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

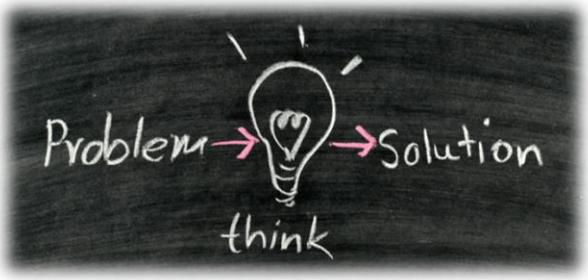
β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x)=20x-x^2.$$ (Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (Μονάδες 6)

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10cm$.

(Μονάδες 7)



1506

α) Έστω ότι το πλάτος του παραλληλογράμμου είναι y cm. Τότε η περίμετρός του είναι:

$$\Pi = 2x + 2y$$

Είναι:

$$\Pi = 40 \Leftrightarrow 2x + 2y = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 20 - x \quad (1)$$

Επειδή τα x, y είναι διαστάσεις πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 20 - x > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x > -20 \Leftrightarrow x < 20$$

Τελικά:

$$0 < x < 20$$

β) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι:

$$E = x \cdot y \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = x(20 - x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E(x) = 20x - x^2, \ x \in (0, 20)$$

γ) Είναι:

$$E(x) \le 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 \le 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 10x + 10^2 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 10)^2 \ge 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Από το ερώτημα (γ) η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι 100 cm^2. Άρα:

$$E(x) = 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow (x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

και $y = 20 - 10 = 10$. Άρα από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 40 cm το τετράγωνο με πλευρά 10 cm έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

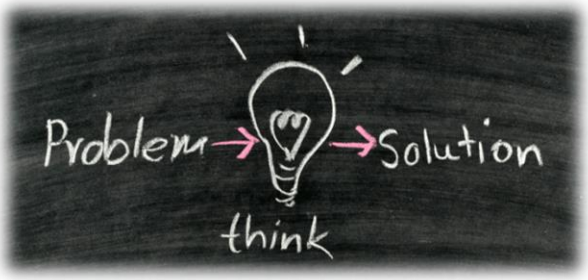
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. (Μονάδες 9)



1507

α) Είναι:

$$\alpha_3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + (3-1)\omega = 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 2\omega \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\alpha_{20} = 61 \Leftrightarrow \alpha_1 + (20-1)\omega = 61 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 10 - 2\omega + 19\omega = 61 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = 333 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 333 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 + (\nu - 1)3 = 333 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = 333 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu = 332 \Leftrightarrow \nu = \frac{332}{3}$$

Ο αριθμός $\frac{332}{3}$ δεν είναι φυσικός και επομένως ο 333 δεν μπορεί να είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

γ) Έστω ότι οι x, y είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $x < y$. Τότε ισχύει ότι:

$$y = \omega + x \quad (2)$$

Είναι:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2} = \frac{\omega + x}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = 2(\omega + x) \Leftrightarrow 3x = 2\omega + 2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 2\omega \Leftrightarrow x = 6$$

Ο αριθμός 6 δεν είναι όρος της αριθμητικής προόδου αφού θα έπρεπε να υπάρχει φυσικός αριθμός ν ώστε να ισχύει:

$\alpha_\nu = 6 \Leftrightarrow 4 + (\nu - 1)\,3 = 6 \Leftrightarrow 3\nu = 5 \Leftrightarrow \nu = \frac{5}{3}$, που δεν είναι φυσικός αριθμός.

1508

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

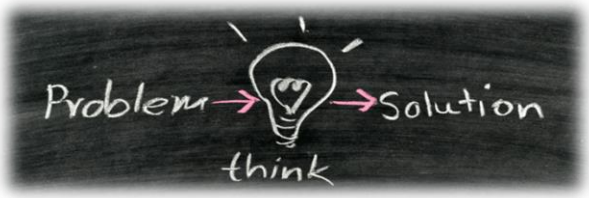
β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|, \text{ τότε:}$$

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ. (Μονάδες 8)



α) Το τριώνυμο $x^2 - 2x + \lambda$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = 4 - 4\lambda$$

Η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda > -4 \Leftrightarrow \lambda < 1$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad (1)$$

γ) i) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2 = x_2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -(x_2 + 2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -x_2 - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 4 \text{ ή } x_1 + x_2 = 0, \text{ απορρίπτεται λόγω του } (\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4 \quad (2)$$

ii) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$x_1 + x_2 + x_1 - x_2 = 2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

Επίσης, από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (-1) = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \lambda = -3$$

Φροντιστήρια ΘΕΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ & ΠΕΖΟΥ

1509

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

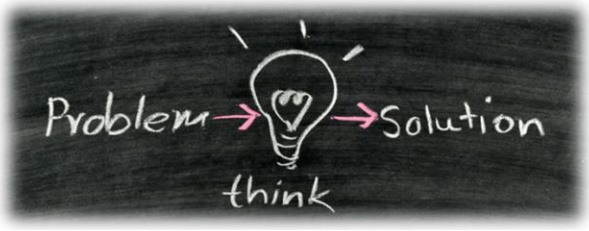
α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. (Μονάδες 10)



α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha$ είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\alpha^2 - 1))^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (-\alpha) =$$
$$= \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 =$$
$$= \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$$

β) Είναι $\Delta > 0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-(\alpha^2-1)) \pm \sqrt{(\alpha^2+1)^2}}{2 \cdot \alpha} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm (\alpha^2+1)}{2\alpha} = \begin{cases} \frac{\alpha^2-1+\alpha^2+1}{2\alpha} = \alpha \\ \frac{\alpha^2-1-\alpha^2-1}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Είναι:

$$|\rho_1 - \rho_2| = 2 \Leftrightarrow \left|\alpha - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right| = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} = -2 \text{ ή } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 1 = -2\alpha \text{ ή } \alpha^2 + 1 = 2\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \text{ ή } \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\alpha + 1)^2 = 0 \text{ ή } (\alpha - 1)^2 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + 1 = 0 \text{ ή } \alpha - 1 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha = -1 \text{ ή } \alpha = 1)$$

ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των *6500* ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι *15* ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε *25* ευρώ.

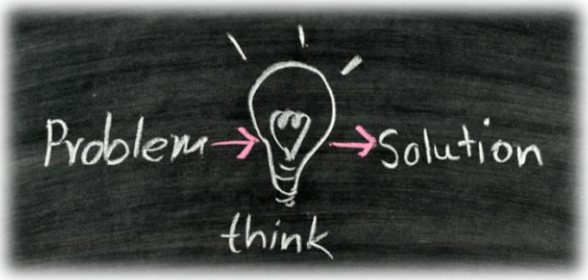
α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος ***K(v)*** της επιχείρησης, αν γεμίζει ***v*** τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα ***E(v)*** της επιχείρησης από την πώληση ***v*** αριθμού τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον *500* ευρώ. (Μονάδες 8)



1510

α) Το μηνιαίο κόστος της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ είναι:

$$K(\nu) = 6500 + 15 \cdot \nu,\ \nu \in \mathbb{N}$$

β) Τα μηνιαία έσοδα της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ είναι:

$$E(\nu) = 25 \cdot \nu,\ \nu \in \mathbb{N}$$

γ)

i) Η επιχείρηση δεν έχει ζημία αν και μονό αν:

$$E(\nu) \geq K(\nu)\ 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\nu \geq 6500 + 15\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\nu \geq 6500 \Leftrightarrow \nu \geq 650$$

Επομένως η επιχείρηση πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 650 τόνερ το μήνα ώστε να μην έχει ζημιά.

ii) Το κέρδος της επιχείρησης προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$P(\nu) = E(\nu) - K(\nu) =$$

$$= 25\nu - 6500 - 15\nu =$$

$= 10\nu - 6500.$

Η επιχείρηση έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ αν και μόνο αν:

$$P(\nu) \geq 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\nu - 6500 \geq 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\nu \geq 7000 \Leftrightarrow \nu \geq 700$$

Επομένως η επιχείρηση έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ αν πουλήσει τουλάχιστον 700 τόνερ.

1511

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση: $|x+1| < 4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \leq 0$. (Μονάδες 15)

α) Είναι:

$$|x+1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x+1 < 4 \Leftrightarrow -4-1 < x+1-1 < 4-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -5 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-5, 3)$$

β) Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) που ανήκουν στο διάστημα $(-5, 3)$ είναι οι:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με μορφή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, το οποίο έχει δύο ρίζες και για το οποίο να ισχύει:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \leq 0$$

και ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Αν το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 τότε ο πίνακας προσήμων του είναι ο εξής:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		+	0	−	0	+	

Επειδή θέλουμε το τριώνυμο να είναι θετικό, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ πρέπει το διάστημα αυτό να είναι εκτός των ριζών x_1, x_2. Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει ότι οι ρίζες δεν πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Επομένως οι ρίζες θα είναι οι αριθμοί 1 και 2.

Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3 \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = 1 \cdot 2 = 2$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 3x + 2$$

1512

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1)

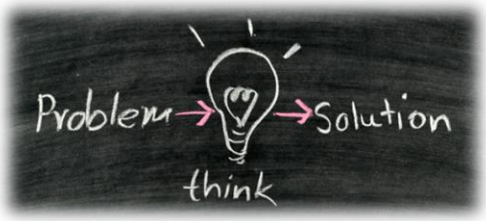
α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής

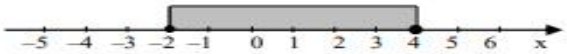
$$x^2 + \beta x + \gamma$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$. (Μονάδες 15)



α) Είναι:

$$|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -3+1 \leq x-1+1 \leq 3+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$



β) Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) που ανήκουν στο διάστημα $[-2, 4]$ είναι οι:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με μορφή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, το οποίο έχει δύο ρίζες και για το οποίο να ισχύει:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

και ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2 τότε ο πίνακας προσήμων του είναι ο εξής:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$		+	0	−	0	+	

Επειδή θέλουμε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ πρέπει το διάστημα αυτό να είναι εκτός των ριζών x_1, x_2. Αυτό με άλλα λόγια σημαίνει ότι οι ρίζες δεν πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $[0, +\infty)$. Επομένως οι ρίζες θα είναι οι αριθμοί -2 και -1.

Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -2 + (-1) = -3 \quad \text{και}$$
$$P = x_1 x_2 = (-2) \cdot (-1) = 2$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 + 3x + 2.$$

1513

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002)$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$

(Μονάδες 8)

α) Το τριώνυμο $-x^2+2x+3$ έχει $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{-2}=-1\\ \frac{-2-4}{-2}=3\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$-x^2+2x+8>0 \Leftrightarrow -1<x<3 \Leftrightarrow x\in(-1,3)$$

$$-x^2+2x+8<0 \Leftrightarrow (x<-1 \text{ ή } x>3) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$$

β) Ο αριθμός 2,999 ανήκει στο διάστημα $(-1, 3)$ όπου το τριώνυμο είναι θετικό. Άρα:

$$f(2{,}999)>0$$

Ο αριθμός $-1{,}002$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty,-1)$ όπου το τριώνυμο είναι αρνητικό. Άρα:

$$f(-1{,}002)<0$$

Επομένως είναι:

$$f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)<0$$

γ) Ο αριθμός $-\alpha^2+2|\alpha|+3=-|\alpha|^2+2|\alpha|+3$ προκύπτει αν στον τύπο της f θέσουμε $x=|\alpha|$.

Είναι δηλαδή:

$$f(|\alpha|)=-|\alpha|^2+2|\alpha|+3=-\alpha^2+2|\alpha|+3$$

Επειδή είναι:

$$-3<\alpha<3 \Leftrightarrow |\alpha|<3 \Leftrightarrow 0\le|\alpha|<3$$

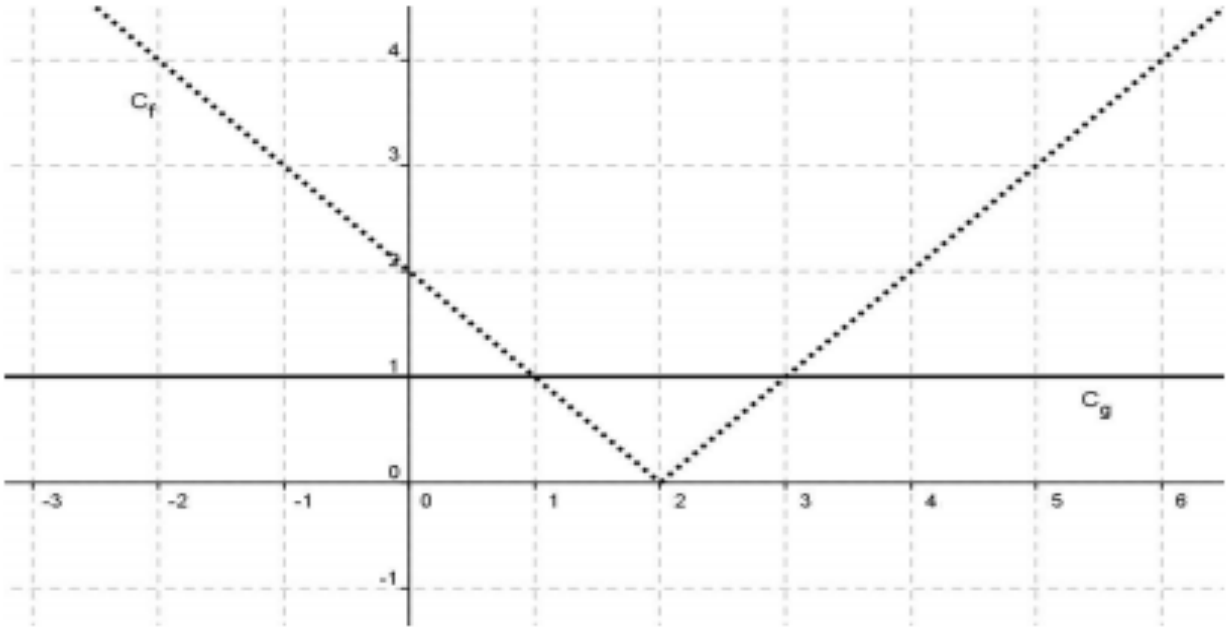
ο αριθμός $|\alpha|$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 3)$ όπου η f είναι θετική. Άρα:

$$f(|\alpha|)>0 \Leftrightarrow -\alpha^2+2|\alpha|+3>0$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=1 \ , \ x\in\mathbb{R}$$



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.

(Μονάδες 10)

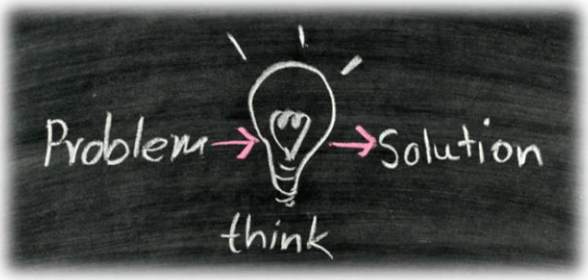
β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A=\frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$

(Μονάδες 5)



1514

α) i) Από τη γραφική παράσταση που δίνεται εκτιμούμε ότι τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A_1(1, 1)$ και $A_2(3, 1)$.

ii) Η C_f είναι κάτω από τη C_g στο διάστημα $(1, 3)$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow (x-2 = 1 \text{ ή } x-2 = -1) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = 1)$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1-2| = 1$ και για $x = 3$ είναι $f(3) = |3-2| = 1$

Άρα τα σημεία τομής τους είναι τα $A_1(1, 1)$ και $A_2(3, 1)$.

Επίσης, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, άρα η C_f είναι κάτω από τη C_g στο διάστημα $(1,3)$.

γ) Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$(1 - f(x) \geq 0 \text{ και } f(x) \neq 0) \Leftrightarrow (f(x) \leq 1 \text{ και } f(x) \neq 0)$$

Αναζητούμε επομένως τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g, τα σημεία τομής της f με την g καθώς και τα σημεία στα οποία η f τέμνει τον άξονα x΄x ώστε να τα απορρίψουμε. Από τη δοθείσα γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν:

$$x \in [1, 2) \cup (2, 3]$$

Σχόλιο

Το σκέλος (γ) θα μπορούσε να λυθεί αλγεβρικά ως εξής:

$$(f(x) \leq 1 \text{ και } f(x) \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x-2| \leq 1 \text{ και } |x-2| \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1 \leq x-2 \leq 1 \text{ και } x-2 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 \leq x \leq 3 \text{ και } x \neq 2) \Leftrightarrow x \in [1, 2) \cup (2, 3]$$

1515

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να αποδείξετε ότι το *1* είναι μεταξύ των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

α) Επειδή $(\alpha-1)(1-\beta)>0$, θα ισχύει:

$$(\alpha-1>0 \text{ και } 1-\beta>0) \text{ ή } (\alpha-1<0 \text{ και } 1-\beta<0)$$

1η περίπτωση

$$\alpha-1>0 \text{ και } 1-\beta>0 \Leftrightarrow \alpha>1 \text{ και } 1>\beta \Leftrightarrow \beta<1<\alpha$$

2η περίπτωση

$$\alpha-1<0 \text{ και } 1-\beta<0 \Leftrightarrow \alpha<1 \text{ και } 1<\beta \Leftrightarrow \alpha<1<\beta$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α και β.

β) Αλγεβρικά

- Αν $\beta<1<\alpha$, τότε:

$$\begin{cases}\beta<1\\1<\alpha\\\beta<\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<1-\beta\\0<\alpha-1,\\\beta-\alpha<0\end{cases}$$

Επομένως:

$$|\alpha-1|=\alpha-1,\ |1-\beta|=1-\beta \text{ και}$$
$$|\beta-\alpha|=4 \Leftrightarrow -(\beta-\alpha)=4 \Leftrightarrow \alpha-\beta=4 \quad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=$$
$$=\alpha-1+1-\beta=\alpha-\beta \overset{(1)}{=} 4$$

- Αν $\alpha<1<\beta$, τότε:

$$\begin{cases}\alpha<1\\1<\beta\\\alpha<\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-1<0\\1-\beta<0,\\0<\beta-\alpha\end{cases}$$

Επομένως:

$$|\alpha-1|=-(\alpha-1)=1-\alpha,$$
$$|1-\beta|=-(1-\beta)=\beta-1 \quad \text{και}$$
$$|\beta-\alpha|=4 \Leftrightarrow \beta-\alpha=4 \quad (2)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=1-\alpha+\beta-1=\beta-\alpha \overset{(2)}{=} 4$$

Γεωμετρικά

Έστω Α(α), Β(β) και Γ(1) όπου το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β. Τότε:

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=$$
$$=d(\alpha,1)+d(1,\beta)=$$
$$=A\Gamma+\Gamma B=$$
$$=AB=d(\alpha,\beta)=$$
$$=|\beta-\alpha|=4$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \qquad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \qquad (2)$$

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

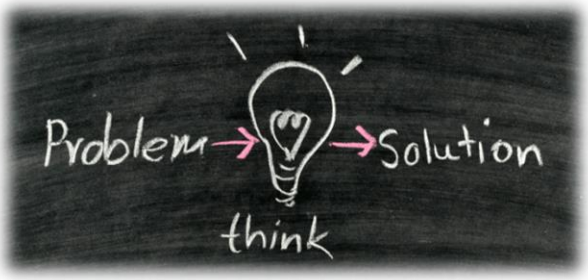
με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)



1516

α) Το τριώνυμο $3x^2 - 14x + 8$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = -14$, $\gamma = 8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{14+10}{6} = 4 \\ \frac{14-10}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Το τριώνυμο $8x^2 - 14x + 3$ έχει $\alpha = 8$, $\beta = -14$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 196 - 96 = 100 > 0$$

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{14 \pm 10}{16} = \begin{cases} \frac{14+10}{16} = \frac{3}{2} \\ \frac{14-10}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

β) Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο

αν ισχύει:

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \quad (5)$$

i) Έστω ότι $\rho = 0$, τότε:

$$(5) \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$$

άτοπο, αφού $\alpha\gamma \neq 0$. Άρα $\rho \neq 0$.

ii) Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4) αν και μόνο αν:

$$\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma\frac{1}{\rho^2} + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \overset{\rho \neq 0}{\Longleftrightarrow} \gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$$

που ισχύει λόγω της ισότητας (5).

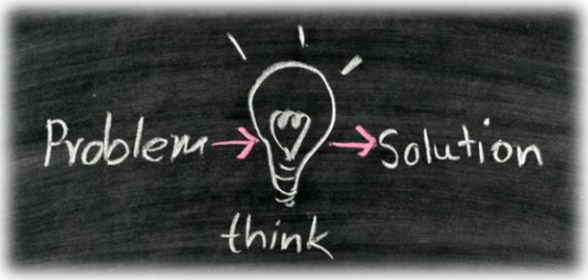
ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ. (Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$ (Μονάδες 7)



1517

α) Η ανίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 \geq 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{1}{2} \text{ ή } x \geq 2\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$$

β) i) Επειδή είναι $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$ οι $\kappa - 1$, $\lambda - 1$ είναι ετερόσημοι. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$$(\lambda - 1 > 0 \text{ και } \kappa - 1 < 0) \Leftrightarrow (\lambda > 1 \text{ και } \kappa < 1) \Leftrightarrow \kappa < 1 < \lambda$$

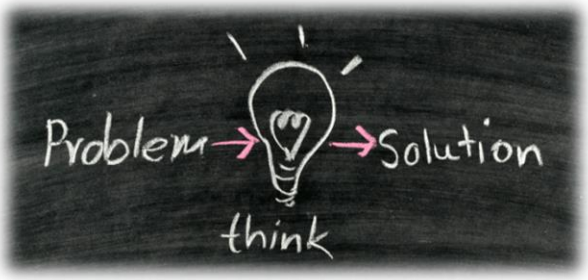
2η περίπτωση

$$(\lambda - 1 < 0 \text{ και } \kappa - 1 > 0) \Leftrightarrow (\lambda < 1 \text{ και } \kappa > 1) \Leftrightarrow \lambda < 1 < \kappa$$

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των κ, λ.

ii) Αφού οι κ, λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ισχύει ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ, τότε θα είναι:

$$\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } \lambda \geq 2 \quad \text{ή} \quad \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2$$



1517

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$$\left(\kappa \le \frac{1}{2} \text{ και } \lambda \ge 2\right) \Leftrightarrow \left(\kappa \le \frac{1}{2} \text{ και } -\lambda \le -2\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:

$$\kappa - \lambda \le \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \le -\frac{3}{2}$$

2η περίπτωση

$$\left(\lambda \le \frac{1}{2} \text{ και } \kappa \ge 2\right) \Leftrightarrow \left(-\lambda \ge -\frac{1}{2} \text{ και } \kappa \ge 2\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:

$$\kappa - \lambda \ge -\frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \ge \frac{3}{2}$$

Τελικά, και από τις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε:

$$\left(\kappa - \lambda \le -\frac{3}{2} \text{ ή } \kappa - \lambda \ge \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow |\kappa - \lambda| \ge \frac{3}{2}$$

1518

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha - 2| < 1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α.

(Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$

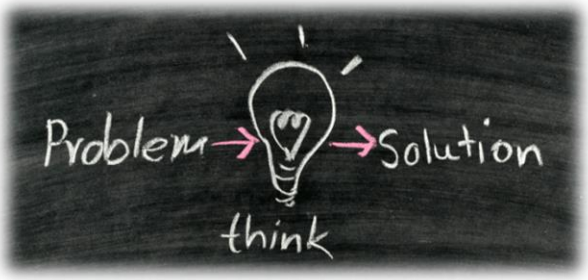
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

(Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0$$

(Μονάδες 7)



1518

α) Είναι:

$$|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1+2<\alpha-2+2<1+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<\alpha<3 \Leftrightarrow \alpha\in(1,3)$$

β) i) Το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=[-(\alpha-2)]^2-4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\alpha^2-4\alpha+4-1=\alpha^2-4\alpha+3$$

Το τριώνυμο $\alpha^2-4\alpha+3$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4>0$$

και ρίζες τις:

$$\alpha_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3\\ \frac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\alpha^2-4\alpha+3$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2-4\alpha+3<0 \Leftrightarrow \Delta<0, \text{ για κάθε } \alpha\in(1,3)$$

ii) Αφού το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$ έχει $\Delta<0$ θα έχει πρόσημο το ίδιο με το πρόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $1>0$. Άρα:

$$x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Σχόλιο

Το σκέλος (βi) μπορεί να λυθεί και ως εξής:

Επειδή $\Delta=[-(\alpha-2)]^2-4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=(\alpha-2)^2-1$ ισχύει ότι:

$$0<|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow 0<|\alpha-2|^2<1^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1<(\alpha-2)^2-1<1-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1<\Delta<0 \Leftrightarrow \Delta<0$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

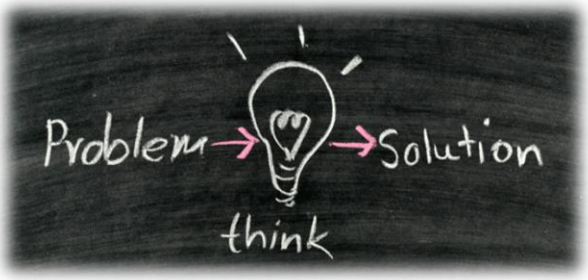
$$\alpha_3 = 4\ ,\ \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ *της* προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $(\beta_\nu) = \dfrac{1}{a_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των *10* πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$$ (Μονάδες 8)



1519

α) Είναι:

$$\alpha_3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^{3-1} = 4 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2 = 4 \quad (1)$$

και

$$\alpha_5 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^{5-1} = 16 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^4 = 16 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda^2} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow} \lambda = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 2^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{\alpha_1\lambda^{\nu-1}}{\alpha_1\lambda^{\nu+1-1}} = \frac{\alpha_1\lambda^\nu\lambda^{-1}}{\alpha_1\lambda^\nu} = \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

Επομένως η (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 1$ και λόγο $\lambda' = \frac{1}{2}$.

γ) Είναι:

$$S_{10} = \alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} = 1 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} =$$
$$= 2^{10} - 1 \quad (3)$$

και

$$S'_{10} = \beta_1\frac{(\lambda')^{10}-1}{\lambda'-1} =$$
$$= 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2^{10}}-1}{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{\frac{1-2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2(2^{10}-1)}{2^{10}} =$$
$$= \frac{2^{10}-1}{2^9} = \frac{1}{2^9}(2^{10}-1) =$$
$$= \frac{1}{2^9}S_{10},$$

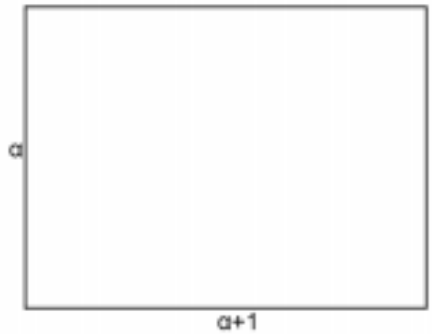
λόγω της (3).

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - \frac{1}{2}| > 1$ (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha + 1$

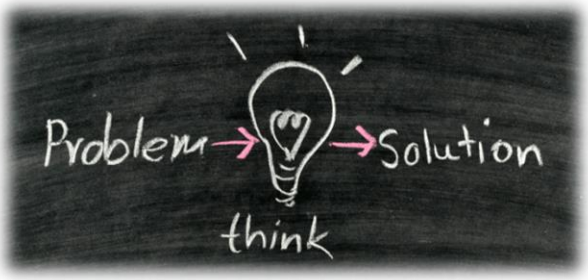


όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha - \frac{1}{2}| > 1$. Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)



1520

α) Το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x^2 + x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$$

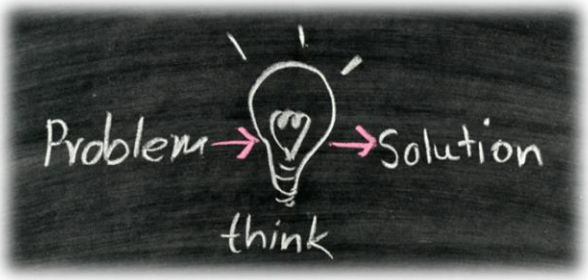
β) Είναι:

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} < -1 \text{ ή } x - \frac{1}{2} > 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x < -1 + \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1 + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ή } x > \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$



1520

γ) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha,\ \alpha > 0$$

Τότε:

$$E < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 6 < 0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} -3 < \alpha < 2$$

Επειδή όμως είναι $\alpha > 0$ συμπεραίνουμε ότι:

$$0 < \alpha < 2 \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \left(\alpha < -\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha > \frac{3}{2}\right) \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha > \frac{3}{2} \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1) και (2) καταλήγουμε ότι:

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2$$

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2\alpha + 2(\alpha + 1) = 2\alpha + 2\alpha + 2 = 4\alpha + 2$$

Τότε από το σκέλος (γi) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{3}{2} < 4 \cdot \alpha < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 < 4\alpha < 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2 < 4\alpha + 2 < 8 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 < \Pi < 10$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

(Μονάδες 10)

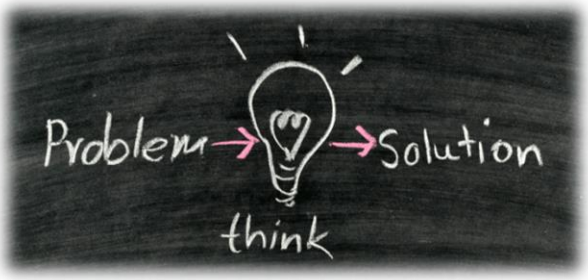
β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Μονάδες 10)



1521

α) Είναι:

$$|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2 \Leftrightarrow -2+4<x-4+4<2+4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2<x<6 \Leftrightarrow x\in(2,6)$$

β) i) Ισχύει ότι:

$$d(x,4)<2 \Leftrightarrow |x-4|<2 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2<x<6 \Leftrightarrow 2\cdot 3<3\cdot x<3\cdot 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6-4<3x-4<18-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2<3x-4<14$$

Άρα $3x-4>0$ (1).

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$2<d(3x,4)<14 \Leftrightarrow 2<|3x-4|<14 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2<3x-4<14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2+4<3x-4+4<14+4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6<3x<18 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{3}<\frac{3x}{3}<\frac{18}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2<x<6,$$

το οποίο ισχύει από σκέλος (α).

ii) Θέλουμε να βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση:

$$d(3x,19)=|3x-19|$$

Από το σκέλος (α) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$2<x<6 \Leftrightarrow 2\cdot 3<3\cdot x<3\cdot 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6-19<3x-19<18-19 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -13<3x-19<-1 \quad (2)$$

Άρα $3x-19<0$. Τότε:

$$d(3x,19)=|3x-19|=-(3x-19)=-3x+19$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης (2) με -1 και βρίσκουμε:

$$-13<3x-19<-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -13\cdot(-1)>(3x-19)\cdot(-1)>-1\cdot(-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13>-3x+19>1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<-3x+19<13 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<d(3x,19)<13$$

ΘΕΜΑ 4

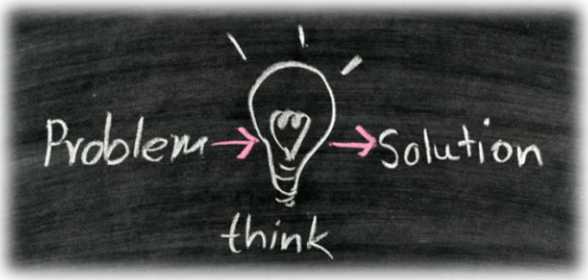
α) Δίνεται το τριώνυμο x^2-3x+2, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $\left|(\alpha-1)(\beta-2)\right|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

(Μονάδες 15)



1522

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

β) Επειδή είναι $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$ οι $\alpha^2 - 3\alpha + 2$, $\beta^2 - 3\beta + 2$ είναι ετερόσημοι.

Από την απάντηση του ερωτήματος (α), διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2 > 0 \text{ και } \beta^2 - 3\beta + 2 < 0 \text{ και } \alpha < \beta) \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha < 1 \text{ ή } \alpha > 2 \text{ και } 1 < \beta < 2 \text{ και } \alpha < \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1 < 0 \text{ και } \beta - 2 < 0)$$

Τότε $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$. Άρα

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

Την περίπτωση $\alpha > 2$ την απορρίπτουμε διότι σε συνδυασμό με την ανίσωση $1 < \beta < 2$ καταλήγουμε ότι $\alpha > \beta$, που είναι άτοπο.

2η περίπτωση

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2 < 0 \text{ και } \beta^2 - 3\beta + 2 > 0 \text{ και } \alpha < \beta) \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (1 < \alpha < 2 \text{ και } \beta < 1 \text{ ή } \beta > 2 \text{ και } \alpha < \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1 > 0 \text{ και } \beta - 2 > 0)$$

Τότε $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$. Άρα

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

Την περίπτωση $\beta < 1$ την απορρίπτουμε διότι σε συνδυασμό με την ανίσωση $1 < \alpha < 2$ καταλήγουμε ότι $\alpha > \beta$, που είναι άτοπο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει ότι:

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x-3, & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 8)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$. (Μονάδες 5)

1523

α) Πρέπει:

$$|2-x| \neq 0 \Leftrightarrow 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R-\{2\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

Το τριώνυμο έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Είναι:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{|2-x|} = \frac{(x-2)(x-3)}{|2-x|}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Για $x > 2$ είναι: $|2-x| = -(2-x) = x-2$, οπότε η f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{|2-x|} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3$$

2η περίπτωση

Για $x < 2$ είναι: $|2-x| = 2-x = -(x-2)$, οπότε η f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{|2-x|} = \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = -(x-3) = -x+3$$

Τελικά έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & x > 2 \\ -x+3, & x < 2 \end{cases}$$

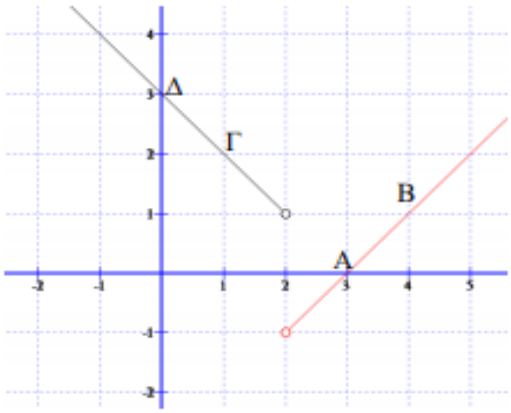
γ) Για $x = 3$ είναι $f(3) = 0$ και για $x = 4$ είναι $f(4) = 1$.

Επομένως η ευθεία $y = x-3$ διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(4, 1)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 2$ και για $x = 0$ είναι $f(0) = 3$.

Επομένως η ευθεία $y = 3-x$ διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(1, 2)$ και $\Delta(0, 3)$.

Η γραφική παράσταση της f είναι:



Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{|2-x|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 3) \overset{x\neq 2}{\Longleftrightarrow} x = 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(3, 0).

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \frac{0^2-5\cdot 0+6}{|2-0|} = \frac{6}{2} = 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B(0, 3).

δ) Αναζητούμε τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα x΄x καθώς και τα σημεία τομής της f με τον άξονα x΄x. Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$x \in (2, 3]$$

Σχόλιο

Προφανώς, τα σημεία τομής με τους άξονες θα μπορούασαμε να τα συμπεράνουμε από τη γραφική παράσταση της f χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

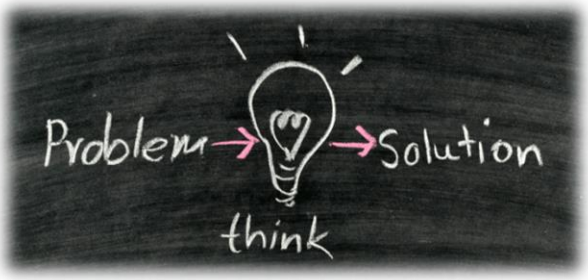
α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 5)



1524

α) Πρέπει:

$$2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha$. Είναι:

$$4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha =$$
$$= 4x^2 - 2\alpha x - 6x + 3\alpha =$$
$$= 2x(2x - 3) - \alpha(2x - 3) =$$
$$= (2x - 3)(2x - \alpha)$$

Τότε ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha+3)x + 3\alpha}{2x-3} = \frac{(2\alpha-3)(2x-\alpha)}{2x-3} = 2x - \alpha$$

γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$f(1) = -1 \Leftrightarrow 2 - \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

δ) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2}, \text{ με } x \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$, $\alpha \neq 3$.

Αν $\alpha = 3$ η δεν C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - \alpha = -\alpha$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -\alpha)$.

1525

ΘΕΜΑ 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| \leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

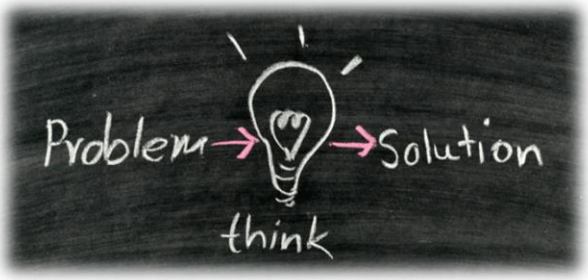
β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 9)



1525

α) Είναι:

$$|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1+2<\alpha-2+2<1+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<\alpha<3 \quad (1)$$

β) Ισχύει ότι:

$$|\beta-3|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq\beta-3\leq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2+3\leq\beta-3+3\leq 2+3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1\leq\beta\leq 5 \quad (2)$$

γ) Από το σκέλος (α) βρίσκουμε:

$$1<\alpha<3 \Leftrightarrow 2\cdot 1<2\alpha<2\cdot 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2<2\alpha<6 \quad (3)$$

Από το σκέλος (β) βρίσκουμε:

$$1\leq\beta\leq 5 \Leftrightarrow -3\cdot 1\geq -3\beta\geq -3\cdot 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3\geq -3\beta\geq -15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -15\leq -3\beta\leq -3 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$2-15<2\alpha-3\beta<6-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -13<2\alpha-3\beta<3$$

δ) Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$1\leq\beta\leq 5 \Leftrightarrow 1\geq\frac{1}{\beta}\geq\frac{1}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\leq\frac{1}{\beta}\leq 1 \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (5) και βρίσκουμε:

$$1\cdot\frac{1}{5}<\alpha\cdot\frac{1}{\beta}<3\cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5}<\frac{\alpha}{\beta}<3$$

ΘΕΜΑ 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

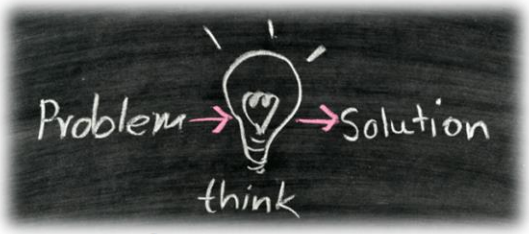
- $|1-3\alpha|<2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3}<\alpha<1$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 10)



1526

α) Είναι:

$$|1-3\alpha|<2 \Leftrightarrow -2<1-3\alpha<2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-1<-1+1-3\alpha<-1+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3<-3\alpha<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-3}{-3}>\frac{-3\alpha}{-3}>-\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<\alpha<1 \quad (1)$$

β) Επειδή η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1, ισχύει ότι:

$$d(2,\beta)<1 \Leftrightarrow |\beta-2|<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1<\beta-2<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1+2<\beta-2+2<1+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<\beta<3 \ (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης (1) με -3 και βρίσκουμε:

$$-\frac{1}{3}<\alpha<1 \Leftrightarrow 1>-3\alpha>-3 \Leftrightarrow -3<-3\alpha<1 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (2) και (3) και βρίσκουμε:

$$1-3<\beta-3\alpha<3+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2<\beta-3\alpha<4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-1<\beta-3\alpha-1<4-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3<\beta-3\alpha-1<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\beta-3\alpha-1|<3$$

γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R αν και μόνο αν ισχύει:

$$4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2\geq 0, \ (4) \ \text{για κάθε } x\in R$$

Το τριώνυμο $4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2$ έχει συντελεστή του x^2 τον αριθμό $4>0$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=[-4(\beta-2)]^2-4\cdot 4\cdot\beta^2=$$
$$=16(\beta^2-4\beta+4)-16\beta^2=$$
$$=16\beta^2-64\beta+64-16\beta^2=$$
$$=64-64\beta$$

Η ανίσωση (4) ισχύει για κάθε $x\in R$ αν και μόνο αν:

$$\Delta<0 \Leftrightarrow 64-64\beta<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -64\beta<-64 \Leftrightarrow \beta>1,$$

το οποίο ισχύει λόγω της ανίσωσης (2).